

Matemática Experimental

2º Teste – 12 de Dezembro de 2006

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de
Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 45 minutos

Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.

1) Diga, justificando, qual é o valor lógico das seguintes afirmações:

1 a) O terceiro elemento do desenvolvimento em fracção contínua do número $\frac{23}{7}$ é o número 3. [1.5]

1 b) O número $\frac{\sqrt{301}}{2}$ pode ser expresso como uma fracção contínua infinita e periódica. [1.5]

2) O resultado da instrução *Mathematica ContinuedFraction*[-Pi, 4] é a lista $\{-3, -7, -15, -1\}$. Sem utilizar a máquina de calcular, obtenha uma aproximação de π , com um erro absoluto inferior a 10^{-4} . Justifique. [2.0]

3 a) Considere a equação diofantina, homogénea, linear, a duas incógnitas, $ax + by = 0$, onde $a, b \neq 0$. Seja $d = \text{mdc}(a, b)$. Prove que um par de inteiros (X, Y) é solução dessa equação se e só se $X = -(b/d)j$, $Y = (a/d)j$, onde $j \in \mathbb{Z}$. [2.5]

3 b) Ao executar a instrução *Mathematica ExtendedGCD*[27, 301], obtém-se o resultado $\{1, \{-78, 7\}\}$. Conclua, justificando, se é ou não verdade que a menor distância entre dois pontos distintos, de coordenadas inteiras, localizados sobre a recta de equação $27y + 301x = 4$, é superior a 300 unidades de comprimento. [2.0]

4) No conjunto das matrizes

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0$$

onde a e b são elementos de \mathbb{Z}_{31} , considere a operação usual do produto de matrizes “.”. Sabe-se que $G = (X, \cdot)$ é um grupo.

4 a) Diga, justificando, se G é finito e, no caso afirmativo, indique o seu cardinal. [1.5]

- 4 b)** Determine a matriz M^{-1} , inversa módulo 31 da matriz M , calculando as entradas respectivas em \mathbb{Z}_{31} , sabendo que $M = \begin{bmatrix} 4 & 27 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. [2.5]
- 4 c)** Tome para *input* a matriz M anterior, e escreva um programa *Mathematica*, devidamente comentado, que produza como resultado M^{-1} . Sugestão: pode utilizar funções predefinidas do sistema. [2.0]
- 5)** Considere os números naturais cuja representação decimal tem a forma $x = 10143215a$, onde a é um dos dígitos 0 a 9.
- 5 a)** Recorrendo, nomeadamente, a conhecimentos sobre aritmética de congruências, conclua se existe ou não algum número do tipo considerado que seja divisível por 7. No caso positivo, calcule o maior desses números. [2.5]
- 5 b)** Escreva código *Mathematica* contendo, entre outros, os comandos *FromDigits* e *Cases*, para obter uma lista (eventualmente vazia) contendo todos os números do tipo x que sejam divisíveis por 7. [2.0]