

# Matemática Experimental

2º Teste – 12 de Dezembro de 2006

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de  
Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 45 minutos

**Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.**

1) Diga, justificando, qual é o valor lógico das seguintes afirmações:

**1 a)** O terceiro elemento do desenvolvimento em fracção contínua do número  $\frac{23}{7}$  é o número 3. [1.5]

**1 b)** O número  $\frac{\sqrt{301}}{2}$  pode ser expresso como uma fracção contínua infinita e periódica. [1.5]

**2)** O resultado da instrução *Mathematica ContinuedFraction*[-Pi, 4] é a lista  $\{-3, -7, -15, -1\}$ . Sem utilizar a máquina de calcular, obtenha uma aproximação de  $\pi$ , com um erro absoluto inferior a  $10^{-4}$ . Justifique. [2.0]

**3 a)** Considere a equação diofantina, homogénea, linear, a duas incógnitas,  $ax + by = 0$ , onde  $a, b \neq 0$ . Seja  $d = \text{mdc}(a, b)$ . Prove que um par de inteiros  $(X, Y)$  é solução dessa equação se e só se  $X = -(b/d)j$ ,  $Y = (a/d)j$ , onde  $j \in \mathbb{Z}$ . [2.5]

**3 b)** Ao executar a instrução *Mathematica ExtendedGCD*[27, 301], obtém-se o resultado  $\{1, \{-78, 7\}\}$ . Conclua, justificando, se é ou não verdade que a menor distância entre dois pontos distintos, de coordenadas inteiras, localizados sobre a recta de equação  $27y + 301x = 4$ , é superior a 300 unidades de comprimento. [2.0]

4 ) No conjunto das matrizes

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a \neq 0$$

onde  $a$  e  $b$  são elementos de  $\mathbb{Z}_{31}$ , considere a operação usual do produto de matrizes “.”. Sabe-se que  $G = (X, \cdot)$  é um grupo.

**4 a)** Diga, justificando, se  $G$  é finito e, no caso afirmativo, indique o seu cardinal. [1.5]

- 4 b)** Determine a matriz  $M^{-1}$ , inversa módulo 31 da matriz  $M$ , calculando as entradas respectivas em  $\mathbb{Z}_{31}$ , sabendo que  $M = \begin{bmatrix} 4 & 27 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . [2.5]
- 4 c)** Tome para *input* a matriz  $M$  anterior, e escreva um programa *Mathematica*, devidamente comentado, que produza como resultado  $M^{-1}$ . Sugestão: pode utilizar funções predefinidas do sistema. [2.0]
- 5 )** Considere os números naturais cuja representação decimal tem a forma  $x = 10143215a$ , onde  $a$  é um dos dígitos 0 a 9.
- 5 a)** Recorrendo, nomeadamente, a conhecimentos sobre aritmética de congruências, conclua se existe ou não algum número do tipo considerado que seja divisível por 7. No caso positivo, calcule o maior desses números. [2.5]
- 5 b)** Escreva código *Mathematica* contendo, entre outros, os comandos *FromDigits* e *Cases*, para obter uma lista (eventualmente vazia) contendo todos os números do tipo  $x$  que sejam divisíveis por 7. [2.0]