Matemática Experimental

1^o Teste – 14 de Novembro de 2006

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1^o ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos

Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.

1) Como sabe, o símbolo $\left(\begin{array}{c} k \\ m \end{array}\right) = \dfrac{k!}{(k-m)!\,m!}$ denota o número de combinações de m elementos, a partir de um conjunto de k elementos.

1 a) Utilize a informação anterior para mostrar que o produto de n inteiros positivos consecutivos é divisível pelo produto dos primeiros n números naturais. **[2.0]**

1 b) Que resultado espera obter da seguinte expressão *Mathematica*? **[1.5]**

$$IntegerQ[Product[i, \{i, 100, 200\}] \,/\, Apply[Times, Range[77]]]$$

Justifique.

2 a) Sem utilizar a máquina de calcular, mostre que o número $n = 2^{78} - 1$ possui, pelo menos, 23 dígitos decimais. (Sugestão: leve em consideração que $3.3 < log_2(10) < 3.4$). **[1.5]**

2 b) Prove que o número $n = 2^{78} - 1$ é composto. (Sugestão: note que $k^2 - 1 = (k-1)\,(k+1)$). **[1.0]**

3) Considere o número natural $n = p_8 \times p_{12} \times p_{16} + 1$, onde p_k, com $k \in J = \{8, 12, 16\}$, designa o k-ésimo número primo. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte proposição:
Qualquer que seja $k \in J$, os números n e p_k são primos relativos. **[2.0]**

4) Se p é um número primo, o número $x_p = 2^p - 1$ diz-se número de Mersenne. Um número de Mersenne que seja primo diz-se primo de Mersenne.

4 a) Dado um número primo p, escreva um predicado para decidir se x_p é ou não primo de Mersenne (pode recorrer à rotina *PrimeQ* do sistema *Mathematica*). **[1.5]**

4 b) Utilize o predicado anterior num programa *Mathematica*, com a estru- **[1.5]**

tura de *Module*, para obter uma lista, eventualmente vazia, contendo todos os primos de Mersenne não inferiores a 10^5 e não superiores a 10^6.

4 c) Sabe-se que o número 109 divide o número $n = 6540$. Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: "O número n possui 25 divisores positivos." **[1.5]**

4 d) Que instruções *Mathematica* escreveria se pudesse utilizar o computador para responder à questão da alínea anterior? Justifique. **[1.5]**

5. Em 1742, numa carta enviada a Euler, C. F. Goldbach escreveu a seguinte conjectura: qualquer número par, maior que 2, é a soma de dois números primos.

5 a) Admitindo que a conjectura é verdadeira para qualquer número par n, ($n \geq 4$), escreva pseudocódigo (devidamente comentado) para um algoritmo que lhe permita determinar números primos a e b, tal que $n = a + b$. **[2.5]**

5 b) Escreva uma rotina *Mathematica*, de nome *Goldbach* para traduzir o algoritmo anterior. (Sugestão: entre outros, poderá utilizar os comandos *Prime* e *PrimeQ*). **[2.0]**

5 c) Escreva uma linha de código, onde utilize a rotina *Goldbach*, para produzir uma tabela contendo a decomposição em primos nas condições da conjectura de Goldbach, para todos os números pares, n, desde 10^5 a 10^6. **[1.5]**