# Matemática Experimental

1º Teste – 20 de Novembro de 2007

Secção de Matemática Aplicada e Análise Numérica — Departamento de Matemática, Instituto Superior Técnico

1º ano Lic. Matemática Aplicada e Computação

Duração: 1 hora e 30 minutos

**Apresente os cálculos, e justifique sucintamente as suas respostas.**

**1)** Sendo $l = \{l_1, l_2, \ldots, l_k\}$ uma lista não vazia de inteiros, a instrução $Tuples[l, 2]$ gera uma lista contendo os pares ordenados do produto cartesiano $l \times l$. Por exemplo, $Tuples[\{3, 7\}, 2]$ gera a lista

$$\{\{3, 3\}, \{3, 7\}, \{7, 3\}, \{7, 7\}\}$$

**1 a)** Qual é o resultado que obtém executando as duas instruções *Mathematica* dadas a seguir? Justifique. **[1.0]**

$data = Tuples[Range[-2, 2], 2];$
$data1 = Cases[data, \{x\_, y\_\} \ /; \ (x^2 + y^2 \ == \ 1 \ || \ x^2 + y^2 \ == \ 4)]$

**1 b)** Após execução das instruções a seguir, resulta uma determinada figura. Apresente um esboço aproximado dessa figura, acompanhado dos comentários que julgue apropriados para justificar como ela é obtida: **[1.5]**

$gr1 = ListPlot[data];$
$gr2 = ListPlot[data1, Joined -> True];$
$Show[gr1, gr2,$
$AspectRatio -> Automatic,$
$Axes -> False]$

**2 )** Dado o número natural $n = 8$, o primeiro número natural $m$, cujo número de divisors é $n$, é o número $m = 24$.

**(a)** Mostre que a proposição anterior é verdadeira. **[1.5]**

**(b)** Escreva pseudocódigo para uma função, de nome $f$, a qual possua como argumento um inteiro $n$ ($n \geq 1$), que produza como resultado o primeiro número natural $m$, cujo número de divisores é $n$. Inclua comentários que facilitem a compreensão do seu algoritmo. **[2.0]**

**(c)** A função $f$ é injectiva? Justifique. **[1.5]**

**(d)** Traduza o pseudocódigo que desenvolveu na alínea 2 (b) num programa *Mathematica* com a estrutura de $Module$. (Sugestão: pode recorrer à rotina $Divisors$). **[1.5]**

**3 (a)** Diga, justificando, qual o valor lógico da seguinte proposição: "O resto da divisão do número $2^{36}$ pelo número 37 é 1". (Sugestão: comece por usar convenientemente o "Pequeno Teorema de Fermat"). **[1.5]**

**3 (b)** Escreva uma instrução *Mathematica* que lhe permita decidir a respeito da validade ou falsidade da referida proposição. Justifique. **[1.0]**

**4)** Considere a sucessão

$$\begin{aligned} &x_0 = -7 \\ &x_1 = 10 \\ &x_{n+2} = -4\,x_n, \qquad n = 0, 1, \ldots \end{aligned}$$

**4 (a)** Escreva código *Mathematica* para definir a sucessão anterior. **[1.5]**

**4 (b)** Obtenha a fórmula explícita da sucessão em causa e, a partir dela, calcule $x_3$. **[2.5]**

**4 (c)** A sucessão é limitada? Justifique. **[1.5]**

**5 (a)** Diga, justificando, como se classifica a complexidade temporal do algoritmo de Euclides para o cálculo de $mdc(a, b)$, onde $a$ e $b$ são inteiros positivos com $a > b$. Se $b = 10^{31}$, indique um majorante do número de divisões inteiras que deveria fazer até terminar o algoritmo. **[1.0]**

**5 (b)** Seja $k \geq 1$. Considere a expressão, na variável natural $n$, **[2.0]**

$$a_n = c_0 + c_1\,n + c_2\,n^2 + \ldots + c_k\,n^k$$

onde $c_i \geq 1,\ i = 0, 1, \ldots, k$, são constantes inteiras positivas. Mostre, justificando, que

$$a_n = \mathcal{O}(n^k)$$

.