Resumo da resolução.do exame de 15 Julho 2002

I.1a) Temos $f(x) = x^2 - \cos(x)$ função par.

$f(-1) = f(1) = 0.4597$, e $f(0) = -1$, logo pelo T. valor intermédio há pelo menos dois zeros, um em $]0,1[$ e outro em $]-1,0[$. Como $f'(x) = 2x + \sin(x)$ (note-se que é ímpar), em $]0,1]$ temos $f'(x) > 0$ (...e em $[-1,0[$ temos $f'(x) < 0$), logo a função é monótona nesses intervalos, ficando provada a unicidade em cada um deles.

I.1b) Calculamos $\alpha = f'(0.75) = 2.18164$.

Como $x_1 = g(x_0), x_2 = g(x_1)$, é claro que $g(x) = x - \frac{1}{\alpha} f(x) = x - \frac{x^2 - \cos(x)}{\alpha}$.

Calculando $x_1 = g(1) = 0.789288$, temos $f(x_1) = -0.0813756$,

e calculando $x_2 = g(x_1) = 0.826588$, temos $f(x_2) = 0.00585834$.

Assim $f(x_1)f(x_2) < 0$, logo o zero está em [0.789288,0.826588]

Por outro lado, $f(x) = 0 \Leftrightarrow 0 = \frac{-f(z)}{\alpha} \Leftrightarrow x = x - \frac{f(x)}{\alpha}$, ou seja há equivalência entre os zeros de f e os pontos fixos de $g(x) = x - \frac{f(x)}{\alpha}$.

I.1c) Pela alínea b) temos $I = [0.789288, 0.826588]$ e $g(x) = x - \frac{x^2 - \cos(x)}{\alpha}$ é de classe C^1 em I.

• $g(I) \subset I$? Ora, $g(0.789288) = 0.826588 \in I$, $g(0.826588) = 0.82390 \in I$, falta ver se g é monótona.

Temos $g'(x) = 1 - \frac{2x + \sin(x)}{\alpha}$ e também $g''(x) = -\frac{1}{\alpha} f''(x) = -\frac{2 + \cos(x)}{\alpha} < 0$, logo g' é decrescente.

Tendo $g'(0.789288) = -0.0489489$ e $g'(0.826588) = -0.094957$ então $g'(x) < 0$ em I e g é decrescente, logo $g(I) \subset I$.

• $\max_{x \in I} |g'(x)| \leq L < 1$?

Sendo g' decrescente, $\max_{x \in I} |g'(x)| = max\{|-0.0489489|, |-0.094957|\} = 0.094957 < 1$.

Concluímos pelo TPF que g tem um único ponto fixo $z \in I$, que pela equivalência de 1.b) é também o único zero de f em I, e a sucessão (x_n) gerada por g converge para z, $\forall$ aprox. inicial $x_0 \in I$.

A convergência é alternada porque que $-1 < g'(x) < 0, \forall x \in I$.

I.1d) Condições suficientes de convergência do método de Newton para $f \in C^2$.

Devemos escolher um intervalo negativo que inclua -1 e a raiz, por exemplo $J = [-1, -0.5]$:

- $f(-1)f(-0.5) = 0.4597 \times (-0.62758) < 0$.
- $f'(x) = 2x + \sin(x) < 0$, porque $x < 0$ e também $\sin(x) < 0$ em J.
- $f''(x) = 2 + \cos(x) > 0$.
- $f(-1)f''(x) > 0 \ \forall x \in J$.

Conclui-se que o método Newton converge para a única raiz negativa $w \in J$, começando com $x_0 = -1$.

[[Nota: Como $|f(-1)/f'(-1)| = 0.16178 < 0.5$, $|f(-0.5)/f'(-0.5)| = 0.4242 < 0.5$ concluiriamos que o método Newton converge para essa raiz negativa qualquer que fosse $x_0 \in J$, em particular com $x_0 = -1$.]]

Não seria possível usar g para aproximar a raiz negativa w, pois $g'(x) = 1 - \frac{2x + \sin(x)}{\alpha} > 1$ se $x \in J$. e, em particular, $g'(w) > 1$.

I.2. Temos $g(x) = x - \frac{F(x)}{F'(c)}$ com $c = \frac{a+b}{2}$. Se $x \in [a, b]$

$$
\begin{aligned}
|g'(x)| &= \left|1 - \frac{F'(x)}{F'(c)}\right| = \left|\frac{F'(c) - F'(x)}{F'(c)}\right| \\
&= \left|\frac{F''(\xi_x)(c - x)}{F'(c)}\right| \leq \frac{|F''(\xi_x)|}{|F'(c)|} \frac{b-a}{2} < 1
\end{aligned}
$$

pois, por hipótese, $\frac{b-a}{2|F'(c)|} \max_{x \in [a,b]} |F''(x)| < 1$.

II.1.a) Como $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ então $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ e temos

$$
\begin{bmatrix} 301 & 10 & 10 & 10 \\ 10 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -10 & -10 & -10 \\ -10 & 101 & 100 & 100 \\ -10 & 100 & 101 & 100 \\ -10 & 100 & 100 & 101 \end{bmatrix}
$$

portanto $cond_1(\mathbf{A}) = ||\mathbf{A}||_1 \, ||\mathbf{A}^{-1}||_1 = 331 \times 311 = 102941$.

Por outro lado $||\delta_{\mathbf{w}}||_1 = \frac{||\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}||_1}{||\mathbf{w}||_1} < \frac{0.5}{200} = 0.0025$.

Isto significa que $||\delta_{\mathbf{v}}||_1 = cond_1(\mathbf{A}) ||\delta_{\mathbf{w}}||_1 \leq 102941 \times 0.0025 = 257.35$

Temos $||\delta_{\mathbf{w}}||_1 = \frac{||\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}||_1}{||\mathbf{w}||_1} = \frac{||(-0.01, 0.1, 0.1, 0.1)||_1}{||(300.99, 10.1, 10.1, 10.1)||_1} = \frac{0.31}{331.29} = 0.00093656$

e $||\delta_{\mathbf{v}}||_1 = \frac{||\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}||_1}{||\mathbf{v}||_1} = \frac{||(-3.01, 30.2, 30.2, 30.2)||_1}{||(-2.01, 30.2, 30.2, 30.2)||_1} = \frac{93.61}{92.61} = 1.01 < 257.35$

... o que está dentro da estimativa.

II.2. Para se verificar a condição suficiente com a diagonal estritamente dominante, basta que $|b| < 1$ (o que é assumido) e que $|3b| < 1 + 3b^2$, o que se verifica porque $\mp 3b < 1 + 3b^2 \Leftrightarrow 3b^2 \pm 3b + 1 > 0$, o que é sempre válido (pois as raízes de $3b^2 \pm 3b + 1 = 0$ são imaginárias, já que $3^2 - 4 \times 3 < 0$, logo a parábola não intersecta o eixo real, sendo sempre positiva).

III.1 a) Apenas conhecemos f em $\{-3, -1, 0, 1, 3\}$, mas os nós não estão igualmente espaçados. Retirando 0 ficamos com $\{-3, -1, 1, 3\}$, nós igualmente espaçados com $h = 2$ (se usássemos $\{-3, 0, 3\}$ o h seria 3, logo maior, e *a priori* a aproximação seria pior). Obtemos assim

$$T_3(f) = 2\left(\frac{\cos(1) + \cos(1)}{2} + \cos\left(\frac{1}{9}\right) + \cos\left(\frac{1}{9}\right)\right) = 5.0559.$$

III.1 b) Para obter a estimativa de erro calculamos
$(\cos(\frac{1}{9}x^2))'' = (-\frac{2x}{9}\sin(\frac{1}{9}x^2))' = -\frac{2}{9}\sin(\frac{1}{9}x^2) - \frac{4x^2}{81}\cos(\frac{1}{9}x^2)$
logo podemos majorar $|(\cos(\frac{1}{9}x^2))''| \le \frac{2}{9} + \frac{4x^2}{81}$, e em $[-3, 3]$ ficamos com
$|f''(x)| \le |(\cos(\frac{1}{9}x^2))''| \le \frac{2}{9} + \frac{4\times 3^2}{81} = \frac{2}{3}$. Portanto,

$$|E_3(f)| \le \frac{2^2 \times 6}{12} \times \frac{2}{3} = 1.3333.$$

c) Para usar a regra de Simpson, nos pontos dados, para além dos nós igualmente espaçados, precisamos de um número par de sub-intervalos, logo um número ímpar de nós. Apenas podemos escolher $\{-3, 0, 3\}$ o que nos leva à regra de Simpson com $h = 3$,

$$S(f) = \frac{3}{3}(\cos(1) + 4\cos(0) + \cos(1)) = 5.0806$$

III 2.a) A tabela de diferenças divididas fica

x_i	f_i	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
0	1			
		1		
2	3		$-\frac{1}{2}$	
		-1		$\frac{1}{8}$
4	1		$\frac{1}{4}$	
		0		
6	1			

e assim $p_3(x) = 1 + x - \frac{1}{2}x(x-2) + \frac{1}{8}x(x-2)(x-4) = 1 + 3x - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3$.
III 2.b) Usando a fórmula do erro
$E_3(x) = f(x) - p_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-2)(x-4)(x-6)$,
e como $f^{(4)}(\xi) = 2$ temos $f(x) = p_3(x) + \frac{1}{12}x(x-2)(x-4)(x-6)$.
III 2.c) Como o polinómio p_3 anterior verifica $f(x_k) = p_3(x_k)$ então $\sum_{k=0}^{3}|f(x_k) - p_3(x_k)|^2 = 0$
e $p_3(x) = 1 + 3x - \frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3$ é o polinómio que minimiza essa quantidade. [[Não havia qualquer necessidade de resolver o sistema normal 4×4, pois a interpolação fornecia zero como valor mínimo.]]

III 3. Como $y' = \frac{x^2}{y}$ temos $f(x, y) = \frac{x^2}{y}$. Assim,

$$y_1 = y_0 + h\frac{(x_0 + \frac{h}{2})^2}{y_0 + \frac{h}{2}(\frac{x_0^2}{y_0})} = -1 + 0.2\frac{(1 + 0.1)^2}{-1 + 0.1\frac{1}{-1}} = -1.22$$

logo $y(1.2) \approx y_1 = -1.22$.