Notas de Análise Complexa

Pedro Lopes
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
1o. Semestre 2007/2008

Estas notas constituem um material de apoio ao curso de Análise Complexa e Equações Diferenciais para as licenciaturas LCERC, LCEIC, LCEE e LCEGI do Instituto Superior Técnico (Tagus Park) no 1o. semestre de 2007/2008 e não pretendem ser um substituto dos manuais escolares disponíveis.

1 Introdução

1.1 Uma motivação para a existência de números complexos

Sejam a, b e c números reais ($a \neq 0$) e considere-se a equação

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Quais são as soluções desta equação? Isto é, quais são os números x tais que $ax^2 + bx + c = 0$? Vejamos se conseguimos obter expressões para eles à custa dos parâmetros a, b e c:

$$0 = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2\right) \quad \textbf{desde que} \quad b^2 - 4ac \geq 0$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = a\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

donde, já que em $\mathbb{R}$ o produto de factores só é nulo quando pelo menos um dos factores for nulo,

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \text{mais uma vez, desde que} \quad b^2 - 4ac \geq 0$$

Resumindo, dados números reais a, b e c (com $a \neq 0$) as equações construídas com estes

$$ax^2 + bx + c = 0$$

admitem soluções

$$x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (a famosa **fórmula resolvente das equações algébricas de 2o. grau**)

que são tambem números reais, **desde que** $b^2 - 4ac \geq 0$.

Então e quando

$$b^2 - 4ac < 0 \text{ ?}$$

Por exemplo, com equações como

$$x^2 + x + 1 = 0 \qquad \text{ou muito simplesmente} \qquad x^2 + 1 = 0$$

Como podemos observar dos cálculos acima, quando $b^2 - 4ac < 0$ o polinómio $ax^2 + bx + c > 0$ donde não soluções para a equação - em $\mathbb{R}$!

Mas porque é que não há-de haver soluções num outro conjunto?

As investigações neste assunto apontaram como prometedor inventar um objecto que fosse solução da equação $x^2 + 1 = 0$. Esse objecto denota-se i e por definição o seu quadrado é -1

$$i^2 = -1$$

Para além disso, conceberam-se novos objectos (números) com a forma $a + ib$ (onde a e b são números reais). Estes números designam-se por números complexos e o conjunto de todos eles denota-se

$$\mathbb{C} = \{\, a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

Esta representação dos números complexos ($a+ib$) designa-se por *representação (ou forma) algébrica.* Dado um número complexo z na forma algébrica, $z = a + ib$, a designa-se por *parte real de z* e b a *parte imaginária de z*, com a notação:

$$a = Re(z) \qquad b = Im(z)$$

Estes números complexos é que, supostamente, vão fornecer as soluções para as equações algébricas apresentadas acima. Tendo em atenção o aspecto da fórmula resolvente (que envolve somas, multiplicações, etc., de números) convem tambem introduzir uma soma e uma multiplicação nestes números complexos.

Como introduzir essas noções?

No sentido de simplificar, podemos tentar imitar o que já conhecemos da soma e da multiplicação em $\mathbb{R}$. Assim, somar dois números complexos $a+ib$ e $c+id$ deveria obedecer a:

$$\begin{aligned}(a+ib)+(c+id) &= a+ib+c+id \quad (associatividade) \; = a+c+ib+id \quad (comutatividade) \; = \\ &= (a+c)+(ib+id) \quad (associatividade) \; = (a+c)+i(b+d) \quad (distributividade)\end{aligned}$$

Quanto à multiplicação:

$$\begin{aligned}(a+ib)(c+id) &= (a+ib)c+(a+ib)id \quad (distributividade) \; = ac+ibc+aid+ibid \quad (associatividade) \; = \\ &= ac+iibd+ibc+iad \quad (comutividade(s)) \; = \\ &= ac+(-1)bd+i(bc+ad) \quad (\textit{definição de } i \textit{ e distributividade}) \; = \\ &= (ac-bd)+i(bc+ad) \quad (associatividade)\end{aligned}$$

Então, dados quaisquer reais a, b, c, d, definimos adição por

$$(a+ib)+(c+id) \overset{def.}{=} (a+c)+i(b+d)$$

e multiplicação por

$$(a+ib)(c+id) \overset{def.}{=} (ac-bd)+i(bc+ad)$$

A adição em $\mathbb{R}$ possuía certas propriedades tais como existência de elemento neutro (isto é, um elemento que nao afectava a soma quando somado a qualquer outro real - o zero 0) e cada número real dispunha de um simétrico (isto é, cada número real tem um número real que lhe corresponde tal que quando se somam os dois obtem-se zero). Será que em $\mathbb{C}$ tambem ocorre o mesmo?

Existência de elemento neutro - $0+i0$:

Dado qualquer número complexo $a+ib$, tem-se

$$(0+i0)+(a+ib) = (0+a)+i(0+b) = a+ib = \cdots = (a+ib)+(0+i0)$$

portanto, $0+i0$ é o elemento neutro da adição em $\mathbb{C}$. Por outro lado, dado um número complexo $a+ib$, será que existe um número complexo $x+iy$ tal que

$$0+i0 = (a+ib)+(x+iy) = (x+iy)+(a+ib) \; ?$$

Tentemos resolver a equação

$$0+i0 = (a+ib)+(x+iy) \quad \Leftrightarrow \quad 0+i0 = (a+x)+i(b+y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a+x=0 \\ b+y=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x=-a \\ y=-b \end{cases}$$

Então, existe um único simétrico de $a+ib$ em $\mathbb{C}$; ele é

$$-(a+ib) = -a-ib$$

Agora quanto à multiplicação em $\mathbb{C}$. Para qualquer $a+ib$

$$(0+i0)(a+ib) = (0a-0b)+i(0a+0b) = 0+i0 = \cdots = (a+ib)(0+i0)$$

donde $0+i0$ é elemento absorvente de $\mathbb{C}$. Por outro lado,

$$(1+i0)(a+ib) = (1a-0b)+i(0a+1b) = a+ib = \cdots = (a+ib)(1+i0)$$

donde $1+i0$ é a unidade da multiplicação em $\mathbb{C}$. Será que todo onúmero complexo, $a+ib$, distinto de $0+i0$ tem inverso para a multiplicação? Isto é,a equação (em x e y)

$$1+i0 = (a+ib)(x+iy)$$

tem solução única?

$$1 + i0 = (ax - by) + i(bx + ay) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = ax - by \\ 0 = bx + ay \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -\frac{a}{b}y \\ 1 = -a\frac{a}{b}y - \frac{b^2}{b}y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{a}{a^2+b^2} \\ y = -\frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}$$

donde cada número complexo $a + ib(\neq 0 + i0)$ tem um inverso para a multiplicação

$$(a + ib)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

Então, até agora $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ parecem ter bastantes semelhanças. Ambas têm uma adição e uma multiplicação em relação às quais existem *zero* e *unidade*. O *zero* é tambem elemento absorvente da multiplicação. E todo o elemento tem simétrico e todo o elemento distinto do *zero* tem inverso. Assim, juntamente com o facto de que a multiplicação é distributiva em relação à adição, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ são chamados *corpos*.

O que é que distingue estes corpos? Enquanto que as soluções de equações algébricas reais (isto é raízes de polinómios com coeficientes reais) podem ter soluções que NÃO são números reais (por exemplo, $x^2 + 1 = 0$) as equações algébricas complexas têm sempre soluções e estas são números complexos.

O que se fez em CDI I e II foi desenvolver sobretudo o Cálculo Diferencial e Integral sobre o corpo $\mathbb{R}$. nesta parte deste curso vamos desenvolver o mesmo mas agora sobre o corpo $\mathbb{C}$. Veremos as novidades (vantagens e desvantagens) que isso nos traz.

2 Representação geométrica dos números complexos

2.1 Conjugado e módulo de um número complexo

Dado um número complexo, na forma algébrica

$$z = a + ib$$

podemos associar-lhe o ponto no plano de coordenadas cartesianas (a, b):

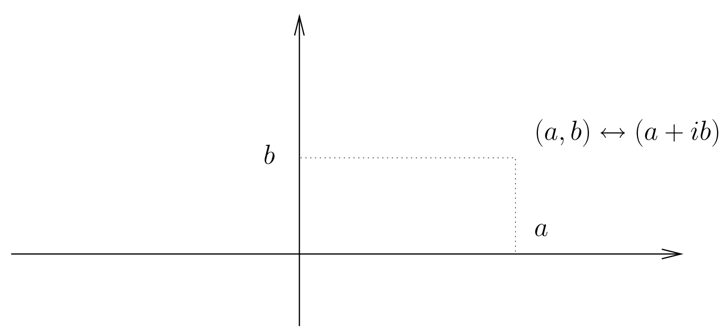


Figure 1: Representação geométrica de número complexo.

Notemos desde já que

$$(a + ib)(a - ib) = (aa - b(-b)) + i(ba + a(-b)) = a^2 + b^2$$

que reconhecemos como o quadrado da distância do ponto (a, b) à origem dos eixos coordenados. Simultâneamente, notamos que, da multiplicação por este número (dito *complexo conjugado* de $a + ib$), se obtem um número real. Este facto é útil quando se divide dois números complexos.

Definições e notação:

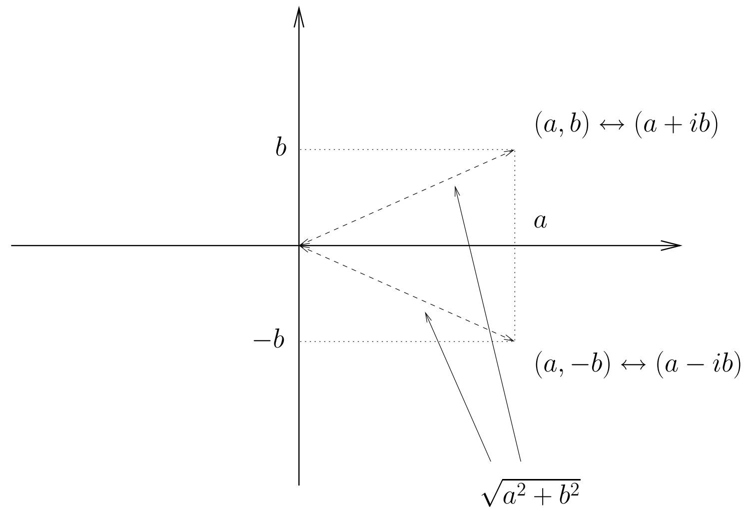


Figure 2: Representação geométrica de número complexo.

Dado um número complexo, $a + ib$, o seu *módulo* é

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e o seu complexo conjugado é

$$\overline{a + ib} = a - ib$$

Da Figura 2 notamos que a representção geométrica do complexo conjugado de um número complexo é a reflexão no eixo das abcissas do número complexo inicial; e que ambos têm o mesmo módulo.

Mais propriedades dos complexos no que toca ao seu módulo e complexo conjugado:

Proposição 2.1 *Sejam z e w números complexos ($z = a + ib, w = c + id$).*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
3. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$
4. $z = \overline{z}$ *sse z é real*
5. $\overline{\overline{z}} = z$
6. $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \qquad Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$

Dem.

1. $\overline{z + w} = \overline{(a + ib) + (c + id)} = \overline{(a + c) + i(b + d)} = (a + c) - i(b + d) =$
$= (a - ib) + (c - id) = \overline{a + ib} + \overline{c + id} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{(a + ib)(c + id)} = \overline{(ac - bd) + i(ad + bc)} = (ac - bd) - i(ad + bc)$
Por outro lado, $\overline{z}\,\overline{w} = \overline{a + ib}\,\overline{c + id} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) + i(-bc - ad) = (ac - bd) - i(bc + ad)$
3. Analoga a 2. A cargo do leitor.
4. $z = \overline{z} \Leftrightarrow a + ib = a - ib \Leftrightarrow a = a$ e $b = -b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z = a + i0 = a$
5. $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = \overline{a + i(-b)} = a - i(-b) = a + ib = z$

6. $\dfrac{z+\overline{z}}{2} = \dfrac{a+ib+\overline{a+ib}}{2} = \dfrac{a+ib+a-ib}{2} = \dfrac{a+a}{2} = a = Re(a+ib) = Re(z)$
   A outra é analoga; fica a cargo do leitor.

$\blacksquare$

Proposição 2.2 *Sejam mais uma vez, z e w números complexos ($z = a+ib, w = c+id$).*

1. $z\overline{z} = |z|^2$
2. $|\overline{z}| = |z|$
3. $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} \quad z \neq 0 + i0$
4. $|zw| = |z|\,|w|$
5. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} \quad w \neq 0 + i0$
6. $|Re(z)| \leq |z| \qquad |Im(z)| \leq |z|$
7. $|z+w| \leq |z| + |w|$
8. $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z-w|$

Dem.

1. $z\overline{z} = (a+ib)\overline{(a+ib)} = (a+ib)(a-ib) = (aa - b(-b)) + i(ba + a(-b)) = (a^2+b^2) + i0 = a^2+b^2 = |z|^2$
2. $|\overline{z}| = |\overline{a+ib}| = |a-ib| = \sqrt{a^2+(-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$
3. Se $z \neq 0+i0, \quad z^{-1} = (a+ib)^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} + i\dfrac{-b}{a^2+b^2}$ (como vimos) $= \dfrac{a-ib}{a^2+b^2} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
4. $|zw| = |(a+ib)(c+id)| = |(ac-bd)+i(bc+ad)| = \sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2} =$
   $\sqrt{(ac)^2 - 2acbd + (bd)^2 + (bc)^2 + 2bcad + (ad)^2} = \sqrt{(ac)^2+(bd)^2+(bc)^2+(ad)^2}$
   Por outro lado, $|z|\,|w| = |a+ib|\,|c+id| = \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} = \sqrt{a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2}$, terminando a demonstração.
5. Analoga à anterior.
6. $|z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq \sqrt{a^2} = |a| = |Re(z)|$ e analogamente para $Im(z)$. Notar a interpretação geométrica destas desigualdades: dado um triângulo rectângulo, o comprimento dos catetos não excede o comprimento da hipotenusa.
7. $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)\left(\overline{z}+\overline{w}\right) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} = |z|^2 + z\overline{w} + \overline{\overline{\overline{z}w}} + |w|^2 =$
   $|z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z|\,|w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2$
   donde $|z+w| \leq |z| + |w|$
8. $|z| = |(z-w)+w| \leq |z-w| + |w|$ donde $|z| - |w| \leq |z-w|$.
   Por outro lado, $|w| = |(w-z)+z| \leq |w-z| + |z| = |z-w| + |z|$, donde $-|z-w| \leq |z| - |w| \leq |z-w|$
   portanto, $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z-w|$

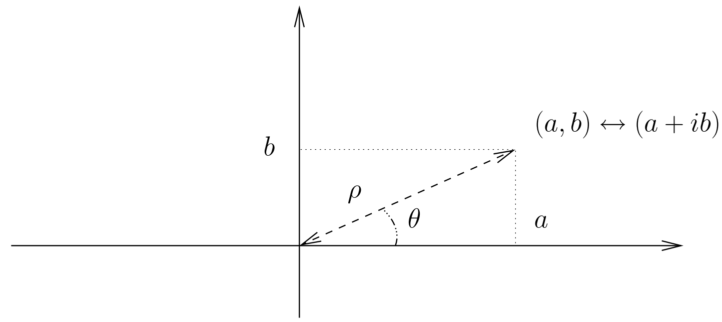


Figure 3: Representação geométrica de número complexo.

2.2 Representação na forma polar ou trigonométrica

Uma vez que representamos $z = a + ib$ no plano cartesiano associando-lhe as coordenadas a e b entaão tambem o podemos representar através de um vector posição de comprimento

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

e fazendo um ângulo θ com o eixo das abcissas, com

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Em particular,

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin(\theta))$$

Relativamente a $z = a + ib$, ρ é o módulo de z e θ é dito o *argumento* de z, $\arg(z)$. Note-se que $\arg(0 + i0)$ não está definido.

Suponhamos que $z = \rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ e $w = \rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$ são iguais. Quais são as implicações a nível dos ρ's e θ's?

$$\begin{aligned}
\rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) = \rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) &\Rightarrow |\rho_1\cos(\theta_1) + i\rho_1\sin(\theta_1)| = |\rho_2\cos(\theta_2) + i\rho_2\sin(\theta_2)| \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\rho_1\cos(\theta_1))^2 + (\rho_1\sin(\theta_1))^2 = (\rho_2\cos(\theta_2))^2 + (\rho_2\sin(\theta_2))^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \rho_1^2(\cos(\theta_1))^2 + \sin(\theta_1))^2) = \rho_2^2(\cos(\theta_2)^2 + \sin(\theta_2)^2) \Leftrightarrow \rho_1^2 = \rho_2^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \quad \text{já que } \rho_1 \text{ e } \rho_2 \text{ são ambos não-negativos}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{cases} \cos(\theta_1) = \cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1) = \sin(\theta_2) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi \quad \text{com } k \text{ inteiro}$$

já que tanto a função cos como a função sin são periódicas de período 2π, basta usar um intervalo de comprimento 2π para caracterizar o argumento de um número complexo. Esses intervalos costumam ser $[0, 2\pi[$ ou $[-\pi, \pi[$. Quando o argumento pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$ diz-se que é um *argumento positivo mínimo*. Quando o argumento pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$ diz-se que é um *argumento principal*.

Somar e/ou subtrair números complexos na forma polar não é muito conveniente (experimente...). Já a multiplicação pode ser simplificada - nalgumas situações:

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= \Big(\rho_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))\Big) \cdot \Big(\rho_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))\Big) = \\
&= \rho_1\rho_2\Big[\Big(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)\Big) + i\Big(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\Big)\Big] = \\
&= \rho_1\rho_2\Big(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\Big)
\end{aligned}$$

Em particular, com $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

$$z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$$

Suponhamos agora que existe um natural n para o qual é verdade que

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

então

$$\begin{aligned} z^n &= z^n \cdot z = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \cdot \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = \\ &= \rho^{n+1}\left[\Big(\cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta)\Big) + i\Big(\sin(n\theta)\cos(\theta) + \cos(n\theta)\sin(\theta)\Big)\right] = \\ &= \rho^{n+1}(\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)) \end{aligned}$$

ou seja,

Proposição 2.3 *Dado $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, é verdade que, para todo o número natural n,*

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

■

Corolário 2.1 *Dado $w = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, a equação (em z)*

$$z^n = w$$

tem n soluções distintas

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

2.3 Módulo e distância entre números complexos

Graças à interpretação geométrica dos números complexos isto é, a associarmos a cada $a + ib$ o par ordenado (a, b) de $\mathbb{R}^2$, fizémos corresponder a cada número complexo $a + ib$, a distância do ponto (a, b) à origem dos eixos coordenados. Esse comprimento é $\sqrt{a^2 + b^2}$ e designámo-lo por *módulo de $a + ib$*, escrevendo:

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(Rever Figura 2 e texto adjacente).

Mas como tambem sabemos somar e subtrair números complexos, tambem faz sentido considerarmos o módulo da diferença de dois números complexos, por exemplo $z = a + ib$ e $w = c + id$:

$$|z - w| = |(a + ib) - (c + id)| = |(a - c) + i(b - d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

Por outro lado este valor, $|z - w|$, tem tambem uma interpretação geométrica:

Então, dados quaisquer dois números complexos z e w, definimos distância $d(z, w)$ entre eles:

$$d(z, w) = |z - w|$$

Note-se que esta é uma função que a cada par de números complexos lhes associa um número real não-negativo que é a sua distância, tal como definida acima.

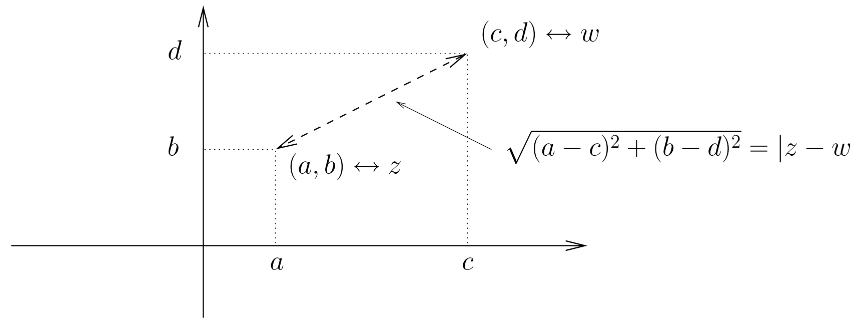


Figure 4: Distância entre dois números complexos.

Esta função distância tem todas as propriedades que esperamos de uma função distância:

Proposição 2.4 *Para todos os números complexos*$z = a + ib, w = c + id, u$*:*

1. $d(z, z) = 0$ *isto é, é nula a distância de um ponto a ele próprio*
2. $d(z, w) = d(w, z)$ *isto é, distância de* z *a* w *é a mesma que distância de* w *a* z*.*
3. $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$

Dem:

1. $d(z, z) = |z - z| = |0 + i0| = 0$
2. $d(z, w) = |z - w| = |(a + ib) - (c + id)| = |(a - c) + i(b - d)| = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} =$
   $= \sqrt{(c - a)^2 + (d - d)^2} = |(c - a) + i(d - b)| = |(c + id) - (a + ib)| = |w - z| = d(w, z)$
3. $d(z, w) = |z - w| = |z - u + u - w| = |(z - u) + (u - w)| \leq |z - u| + |u - w| = d(z, u) + d(u, w)$

■

Assim, com esta definição de distância, podemos construir a vizinhança de um número complexo, c, de um dado raio (número real positivo) r:

$$B(c; r) = \{ z \in \mathbb{C} \quad | \quad |z - c| < r \}$$

Graficamente:

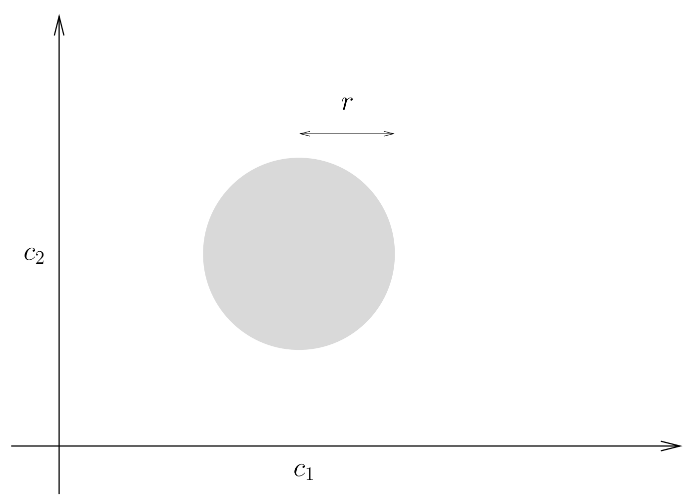


Figure 5: Vizinhança (região sombreada) de raio r de número complexo $c = c_1 + ic_2$

Com a noção de distância conseguimos definir a vizinhança de um ponto e com esta noção podemos agora considerar questões topológicas como por exemplo dado um ponto e um conjunto decidir se esse ponto é interior ao conjunto, se é aderente ao conjunto, ou se é exterior ao conjunto.

Considere um subconjunto X de $\mathbb{C}$ e um número complexo z

- Diz-se que z é *interior* a X, (notação: $z \in intX$) se existir uma vizinhança de z toda contida em X isto é, se existir um real positivo r tal que $B(z;r) \subset X$.
- Diz-se que z é *aderente* a X, ou que z pertence ao *fecho* de X (notação: $z \in \overline{X}$) se qualquer vizinhança de z contem pontos de X isto é, se para todo o real positivo r, $B(z;r) \cap X \neq \emptyset$.
- Diz-se que z é *exterior* a X se existir uma vizinhança de z toda contida no complementar de X isto é, se existir um real positivo r tal que $B(z;r) \subset X^c$.

Dizemos ainda que o conjunto X é *limitado* se existir uma vizinhaça de $0 + i0$ que o contem isto é, se existir um real positivo R tal que $X \subset B(0 + i0)$. Note-se que isto é equivalente a dizer que qualquer $z \in X$ é tal que $|z| \leq R$.

3 Sucessões

Dadas sucessões de números complexos podemos tambem agora estudá-las quanto á convergência e quanto a serem ou não limitadas. Relembrando, uma sucessão é uma aplicação (função) dos naturais num conjunto previamente fixado. Se falamos de sucessão de números complexos então esse conjunto é o $\mathbb{C}$.

$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (z_n) é a notação para uma sucessão de números complexos de termo geral z_n

Exemplos/exercícios:

1. $z_n = \frac{1}{n} + i\frac{1}{n}$
2. $z_n = 5$
3. $z_n = i^n$
4. $z_n = n + i$

Uma sucessão, (z_n), é dita *limitada* se o conjunto dos termos da sucessão for limitado. Como já observámos, isto é equivalente a dizer que existe um real positivo R tal que, qualquer que seja o natural n

$$|z_n| \leq R$$

Uma sucessão, (z_n), é dita *convergente* (para o número complexo, l) se para cada $\epsilon > 0$ existir um natural N tal que

$$n > N \quad \Rightarrow |z_n - l| < \epsilon$$

"A sucessão converge" é sinónimo de "a sucessão tem limite". Notar no entanto que sucessão limitada e sucessão com limite são conceitos distintos.

Proposição 3.1 *Seja (z_n) uma sucessão onde $Re(z_n) = a_n$ e $Im(z_n) = b_n$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. z_n converge para $l(= a + ib)$ é equivalente a dizer que $Re(z_n)$ converge para a e $Im(z_n)$ converge para b.*

Dem. Suponha que para cada n natural, $z_n = a_n + ib_n$ e que

$$\lim_{n\mapsto\infty} z_n = l(= a + ib)$$

Então, pela definição de limite, dado um real positivo ϵ, existe um número natural N tal que para $n > N$

$$\epsilon > |z_n - l| = |(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \geq$$

$$\geq \begin{cases} \sqrt{(a_n - a)^2} \\ \sqrt{(b_n - b)^2} \end{cases} = \begin{cases} |a_n - a| \\ |b_n - b| \end{cases}$$

donde podemos concluir que para cada ϵ positivo, existe um natural N tal que para todo o $n > N$ se tem

$$|a_n - a| < \epsilon \qquad \text{e} \qquad |b_n - b| < \epsilon$$

isto é, existem os limites de (a_n) e de (b_n) tendo-se

$$\lim_{n\mapsto\infty} a_n = a \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\mapsto\infty} b_n = b$$

Suponha agora que

$$\lim_{n\mapsto\infty} a_n = a \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\mapsto\infty} b_n = b$$

Então, por definição de limite, dado $\epsilon > 0$, existe um natural N tal que para $n > N$ se tem

$$|a_n - a| < \epsilon/\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad |b_n - b| < \epsilon/\sqrt{2}$$

Então,

$$|z_n - l| = |(a_n + ib_n) - (a + ib)| = |(a_n - a) + i(b_n - b)| = \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \sqrt{\epsilon/\sqrt{2} + \epsilon/\sqrt{2}} = \epsilon$$

donde existe o limite de (z_n) e

$$\lim_{n\mapsto\infty} z_n = l$$

■

Com este resultado, uma das maneiras de averiguar se o limite de uma sucessão de números complexos, z_n, existe é averiguar se existem os limites das sucessões correspondentes de números reais, $Re(z_n)$ e $Im(z_n)$.

Outro resultado relevante que nos faculta uma outra maneira de pesquisar o limite de uma sucessão de números complexos é o seguinte:

Proposição 3.2 *Seja (z_n) uma sucessão de números complexos.*

Para cada n natural, seja $\rho_n = |z_n|$ e $\theta_n = arg(z_n)$. Se

$$\lim_{n\mapsto\infty} \rho_n = \rho \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\mapsto\infty} \theta_n = \theta$$

então (z_n) converge e

$$\lim_{n\mapsto\infty} z_n = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Dem. Pela Proposição anterior, já que

$$\lim_{n\mapsto\infty} Re(z_n) = \lim_{n\mapsto\infty} \rho_n \cos(\theta_n) = \rho\cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\mapsto\infty} Im(z_n) = \lim_{n\mapsto\infty} \rho_n \sin(\theta_n) = \rho\sin(\theta)$$

■

Proposição 3.3 *Toda a sucessão convergente é sucessão limitada.*

Dem. Seja (z_n) uma sucessão convergente com $\lim_{n\mapsto\infty} z_n = l$. Então por definição de sucessão convergente, dado $\epsilon > 0$ existe um natural N tal que

$$\epsilon > |z_n - l| \leq \big||z_n| - |l|\big| \Rightarrow -\epsilon < |z_n| - |l| < \epsilon$$

Já que $|l| > 0$, faça-se $\epsilon = |l|$. Existe, então, N tal que

$$-|l| < |z_n| - |l| < |l| \Leftrightarrow 0 < |z_n| < 2|l|$$

Então, a para $n > N$, $|z_n| < 2|l|$ ou seja o conjunto dos termos da sucessão **a partir de** z_N são limitados. Só falta perceber o que se passa com os N primeiros termos. Mas o conjunto dos N primeiros termos da sucessão é um conjunto finito (tem N termos) logo limitado. O conjunto de todos os termos da sucessão é então a união de dois conjuntos limitados, logo é limitado. A sucessão é portanto limitada. ■

Diz-se que uma sucessão, (z_n), tem *limite infinito* quando, para cada $\epsilon > 0$, existe um natural N tal que

$$n > N \Rightarrow |z_n| > \frac{1}{\epsilon}$$

Exercício:
Classifique as quatro sucessões acima quanto a serem limitadas e quanto a serem convergentes.

4 Séries

Exemplo motivador:

- Escolha um número complexo e denote-o c
- Com ele construa a sucessão
$$z_n = c^n \qquad n \in \mathbb{N}$$
- Com esta sucessão, construa a nova sucessão:

$$S_N = c^0 + c^1 + c^2 + \cdots + c^N = \sum_{n=0}^{N} c^n$$

A sucessão (S_N) converge, diverge, é limitada, não limitada?

Como abordar esta questão? Quanto maior é o termo da série, mais parcelas aparecem!

Tentemos escrever S_N de outra forma:

$$\begin{aligned} S_{N+1} &= c^0 + c^1 + c^2 + \cdots + c^N + c^{N+1} = S_N + c^{N+1} \\ &= c^0 + c(c^0 + c^1 + c^2 + \cdots + c^N) = 1 + cS_N \end{aligned}$$

donde

$$S_N + c^{N+1} = 1 + cS_N \Leftrightarrow (1-c)S_N = 1 - c^{N+1} \Leftrightarrow S_N = \frac{1 - c^{N+1}}{1-c}$$

(onde na última passagem assumimos $c \neq 1$). Obtivémos assim uma nova expressão para S_N cujo "tamanho" não aumenta com N. De facto, aqui basta saber qual é o limite da sucessão c^n para se saber o limite da sucessão S_N. Obtem-se assim

$$\lim_{N \mapsto \infty} S_N = \begin{cases} \frac{1}{1-c}, & \text{se } |c| < 1 \\ \text{não existe} & \text{se } |c| \geq 1 \end{cases}$$

Então para $|c| < 1$, a sucessão S_N converge. Mas

$$\lim_{N \mapsto \infty} S_N = \lim_{N \mapsto \infty} \sum_{n=0}^{N} c^n = c^0 + c^1 + c^2 + \cdots + c^N + \ldots$$

ou seja estamos a considerar uma soma com **infinitas** parcelas. E verificámos que se $|c| < 1$ essa soma de infinitas parcelas representa um número $1/(1-c)$ ao que passo que quando $|c| \geq 1$ essa soma não representa um número. Estas somas de infinitas parcelas são chamadas de *séries*. No caso em que elas representam um número dizemos que as séries convergem; caso contrário dizemos que as séries divergem.

No caso geral, uma série é a soma de todas as parcelas de uma dada sucessão, z_n, a partir de uma certa ordem p. A notação é:

$$\sum_{n=p}^{\infty} z_n$$

Dada uma série, chama-se *sucessão das somas parciais* à sucessão:

$$S_N = \sum_{n=p}^{N} z_n$$

Com esta notação, a série diz-se convergente se a sua sucessão das somas parciais convergir; a série diz-se divergente no caso contrário.

Proposição 4.1 *Dada a sucessão $z_n = x_n + iy_n$, a série*

$$\sum_{n=p}^{\infty} z_n$$

é convergente se e só se forem convergentes as séries

$$\sum_{n=p}^{\infty} x_n \qquad e \qquad \sum_{n=p}^{\infty} y_n$$

Dem. (Exercício). ■

Proposição 4.2 *Se a série*

$$\sum_{n=p}^{\infty} z_n$$

é convergente então

$$\lim_{n \mapsto \infty} z_n = 0 + i0$$

Dem. (Exercício). ■

Diz-se que a série

$$\sum_{n=p}^{\infty} z_n$$

converge absolutamente se a série

$$\sum_{n=p}^{\infty} |z_n|$$

convergir

Diz-se que a série

$$\sum_{n=p}^{\infty} z_n$$

converge simplesmente se ela convergir mas a série

$$\sum_{n=p}^{\infty} |z_n|$$

divergir.

Proposição 4.3 *A série*

5 Funções Complexas

5.1 Primeiros exemplos

Uma função complexa definida num conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e tomando valores em $\mathbb{C}$, representa-se

$$f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

Por exemplo,

$$f(z) = z^2 \quad \text{para todo o } z \text{ em } \mathbb{C}$$

Neste caso, $\Omega = \mathbb{C}$. Como fazemos corresponder a cada número complexo $z = a + ib$ o par ordenado de números reais (a, b) (e vice-versa), então a cada subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ fazemos corresponder o subconjunto Ω^* de $\mathbb{R}^2$ da seguinte maneira

$$\Omega^* = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a + ib \in \Omega\}$$

Como a imagem da nossa função f tambem está contida em $\mathbb{C}$, então tambem pode ser escrita na forma algébrica dando origem as funções u e v, respectivamente, parte real da imagem de f e parte imaginária da imagem de f $(z = x + iy)$:

$$f(z) = f(x + iy) = Re(f(x + iy)) + iIm(f(x + iy)) = u(x, y) + iv(x, y)$$

com

$$u(x, y) = Re(f(x + iy)) \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = Im(f(x + iy))$$

Assim, dada uma função complexa de variável complexa

$$\begin{aligned} f \,:\, \Omega \subset \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

corresponde-lhe uma função que tambem chamaremos f, de um subconjunto de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{aligned} f \,:\Omega^* \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned}$$

com

$$u(x, y) = Re(f(x + iy)) \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = Im(f(x + iy))$$

Exemplo: $f(z) = z^2$, para todo o $z \in \mathbb{C}$.
Com $z = x + iy$ vem

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$$

donde

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = 2xy$$

Podemos fazer tambem uma decomposição usando a representação polar dos números complexos.
Com $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$,

$$\begin{aligned} f\big(\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\big) &= \big(\rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))\big)^2 = \rho^2\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)^2 = \\ &= \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(\theta)\cos(\theta)) \end{aligned}$$

Com a ajuda da representação polar temos, **neste caso**, uma ideia mais clara do que esta função faz ao seu argumento. Assim, esta função pega num complexo de módulo ρ e de argumento θ e faz-lhe corresponder um complexo de módulo ρ^2 e argumento 2θ. Em particular, esta função envia uma circunferência de raio ρ numa circunferênica de raio ρ^2, ”fazendo variar o argumento ao dobro da velocidade”.

Exemplo: $g(z) = z^{-1}$ para todo o $z \in \mathbb{C}$
Imitando as abordagens feitas acima, tem-se, na representação algébrica

$$g(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \text{para } x+iy \neq 0+i0$$

enquanto que na representação polar

$$\begin{aligned} g\big(\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\big) &= \frac{1}{\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))} = \frac{1}{\rho}\,\frac{1}{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} = \\ &= \frac{1}{\rho}\,\frac{\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)} = \rho^{-1}\left(\cos(\theta)-i\sin(\theta)\right) = \rho^{-1}\left(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\right) \end{aligned}$$

Podemos assim interpretar a função g como enviando circunferências de raio ρ para circunferências de raio ρ^{-1} e ao variar o argumento, as imagens são levadas a percorrer a circunferência de raio ρ^{-1} no sentido horário.

TPC: Mostrar que para todo o natural n, se tem

$$\Big(\rho(\cos(\theta)+i\sin(\theta))\Big)^{-n} = \rho^{-n}(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta))$$

5.2 Função exponencial

A *exponencial complexa* é a função complexa de variável complexa dada por:

$$e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos(y)+i\sin(y))$$

Vejamos as principais propriedades desta função:

Proposição 5.1 *Para todos os z, w complexos ($z = x+iy, w = u+iv$), tem-se*

1. $e^z \neq 0$
2. $e^{z+w} = e^z e^w$
3. $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$
4. $|e^z| = e^{Re(z)}$
5. $\arg(e^z) = Im(z) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$
6. *A função exponencial é periódica de período $i2\pi$*
7. $e^z = 1 \Leftrightarrow z = i2k\pi$

Dem: $z = x+iy, w = u+iv$

1. $0+i0 = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos(y) + ie^x\sin(y) \Leftrightarrow e^x\cos(y) = 0$ e $e^x\sin(y) = 0 \Leftrightarrow e^x = 0$ e $\big[\cos y = 0 \text{ e } \sin y = 0\big]$ mas como não há nenhum x tal que $e^x = 0$ e como não há nenhum y tal que $\cos(y) = 0 = \sin(y)$ então não há nenhum $x+iy$ tal que $e^{x+iy} = 0$;

2. $e^{z+w} = e^{(x+iy)+(u+iv)} = e^{(x+u)+i(y+v)} = e^{x+u}(\cos(y+v)+i(\sin(y+v))) = e^xe^u\Big((\cos(y)\cos(v) - \sin(y)\sin(v)) + i(\sin(y)\cos(v)+\sin(v)\cos(y))\Big) = e^xe^u\Big((\cos(y)+i\sin(y))\cos(v) + (\cos(y) + i\sin(y))i\sin(v)\Big) = e^xe^u(\cos(y)+i\sin(y))(\cos(v)i\sin(v)) = e^x(\cos(y)+i\sin(y))e^u(\cos(v)i\sin(v)) = e^{x+iy}e^{u+iv}$

3. $\overline{e^z} = \overline{e^x(\cos(y) + i\sin(y))} = \overline{e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)} = e^x\cos(y) - ie^x\sin(y) = e^x(\cos(y) - i\sin(y)) = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) = e^{x-iy} = e^{\overline{z}}$

4. $|e^z| = |e^x(\cos(y) + i\sin(y))| = |e^x\cos(y) + ie^x\sin(y)| = \sqrt{(e^x\cos(y))^2 + (e^x\sin(y))^2} = = \sqrt{(e^x)^2((\cos(y))^2 + (\sin(y))^2)} = \sqrt{(e^x)^2 \cdot 1} = e^x = e^{Re(z)}$

5. $\arg(e^z) = \arg(e^x(\cos(y) + i\sin(y))) = y + 2k\pi = Im(z) + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

6. $e^{z+i2\pi} = e^z e^{i2\pi} = e^z \cdot e^0(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)) = e^z \cdot 1 \cdot 1 = e^z$

7. $1 = |1| = |e^z| = e^x$ donde $x = 0$. Então, $1 = e^{0+iy} = \cos(y) + i\sin(y) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \cos(y) \\ 0 = \sin(y) \end{cases} \Leftrightarrow y = 2k\pi$.

   Então, $z = 0 + i2k\pi = i2k\pi$

■

Definimos a função exponencial através da expressão ($z = x + iy$)

$$e^z = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$$

e provámos na Proposição anterior que

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

Em particular, para $z = x + i0$ e $w = 0 + iy$ vem

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

mas como por definição de exponencial $e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$ obtem-se, para todo o y pertencente a $\mathbb{R}$

$$\boxed{e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)}$$

conhecida por *Identidade de Euler*.

Exemplo: Seja $f(z) = e^z$, para todo o número complexo z. Qual é a imagem através de f de:

$$A = \{x + iy \,|\, x = 2 \quad \text{e} \quad 0 \leq y < 2\pi\} \qquad \text{e} \qquad B = \{x + iy \,|\, x = 2 \quad \text{e} \quad 2\pi \leq y < 4\pi\}$$

Se $x + iy \in A$ isto é, $x = 2$ e $0 \leq y < 2\pi$, então

$$f(x + iy) = e^{x+iy} = e^{2+iy} = e^2(\cos y + i\sin y)$$

e deixando y variar entre 0 e 2π obtem-se

$$f(A) = \{\, e^2(\cos y + i\sin y) \mid 0 \leq y < 2\pi \,\}$$

Por outro lado, se $x' + iy' \in B$, isto é, $x' = 2$ e $2\pi \leq y' < 4\pi$, então

$$f(x' + iy') = e^{x'+iy'} = e^{2+iy'} = e^2(\cos y' + i\sin y')$$

e deixando y' variar entre 0 e 2π obtem-se

$$f(B) = \{\, e^2(\cos y' + i\sin y') \mid 2\pi \leq y' < 4\pi \,\} = \{\, e^2(\cos y' + i\sin y') \mid 0 \leq y' < 2\pi \,\} = f(A)$$

Ver Figura 6.

Portanto, a função exponencial não é injectiva como acabámos de ver: pontos distintos têm a mesma imagem.

Vamos no entanto ver que restrições desta função a certos subconjuntos de $\mathbb{C}$ já são funções injectivas.

Fixe um número real positivo, r, e considere o seguinte subconjunto dos números complexos:

$$A_r = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } r \leq y < r + 2\pi\}$$

(ver Figura 7)

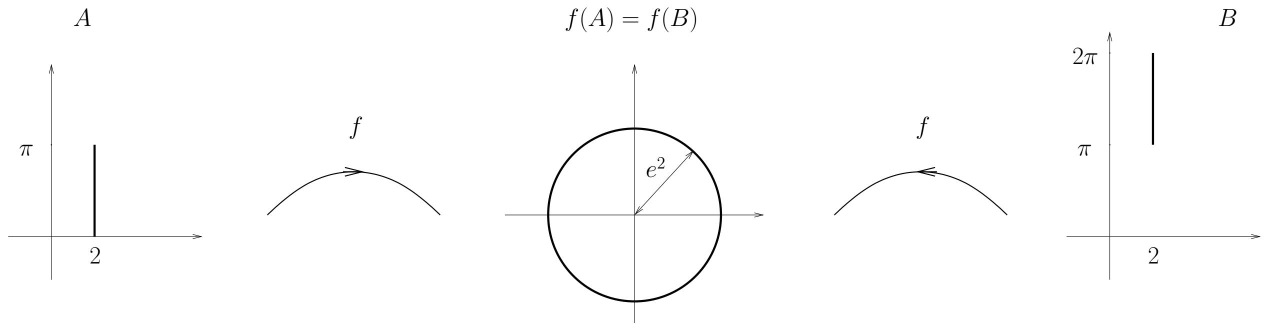


Figure 6: A, B e $f(A) = f(B)$

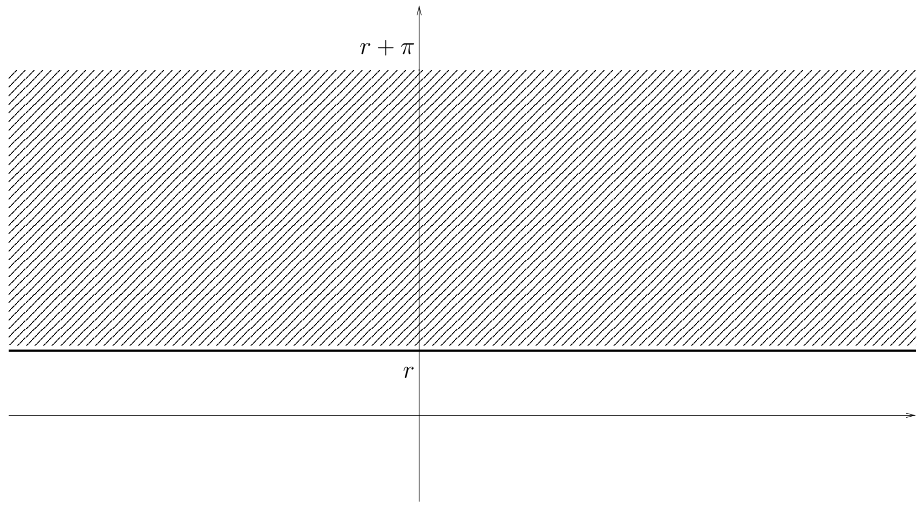


Figure 7: A, B e $f(A) = f(B)$

Proposição 5.2 *Fixado r real positivo, considere-se a função exponencial definida em A_r. Nestas condições f é injectiva e $f(A_r) = \mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$.*

Dem:

Injectividade: Suponha $z_1(= x_1 + iy_1), z_2(= x_2 + iy_2) \in A_r$ tais que $f(z_1) = f(z_2)$. Em particular, os módulos das imagens têm que ser iguais isto é,

$$|f(z_1)| = |f(z_2)| \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Agora, já sabendo que $x_1 = x_2$ vem

$$f(z_1) = f(z_2) \Leftrightarrow \cos y_1 + i \sin y_1 = \cos y_2 + i \sin y_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y_1 = \cos y_2 \\ \sin y_1 = \sin y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad y_2 = y_1 + 2k\pi$$

mas como $r \leq y_1, y_2 < r + 2\pi$, então

$$y_2 = y_1$$

e portanto

$$z_1, z_2 \in A_r \text{ e } f(z_1) = f(z_2) \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2$$

ou seja, a função exponencial é injectiva em A_r.

Já sabemos que **não** existe número complexo z tal que $e^z = 0$.

Seja w um número complexo diferente de $0 + i0$. Com ele construa-se $z = x + iy$ tal que

$$x = \log|w| \qquad y = \arg w + 2k\pi \quad \text{tal que } \arg w + 2k\pi \in [r, r + 2\pi[$$

Então, $z = \log|w| + i(\arg w + 2k\pi)$ pertence a A_r e

$$e^z = e^{\log|w|+i(\arg w+2k\pi)} = e^{\log|w|}(\cos(\arg w+2k\pi)+i\sin(\arg w+2k\pi)) = |w|(\cos\arg w+i\sin\arg w) = w$$

Portanto, para cada $w \in \mathbb{C}\setminus\{0+i0\}$ existe um $z \in A_r$ tal que $e^z = w$. ■

5.3 Função logaritmo

O facto de que exponencial é injectiva sobre A_r e tem por imagem $\mathbb{C}\setminus\{0+i0\}$ quer dizer que a exponencial realiza uma bijecção entre A_r e $\mathbb{C}\setminus\{0+i0\}$.

Podemos então, para cada r real positivo, considerar a função inversa da exponencial restrita a A_r. À função inversa da restrição da exponencial ao subconjunto A_r chamamos *logaritmo relativo ao intervalo* $[r, r+2\pi[$ (notação: $\ln_r$) com

$$\ln_r(z) = \log|z| + i\arg z \qquad \text{com } \arg z \in [r, r+2\pi[$$

(Note-se que o log à direita da igualdade refere-se à função real logaritmo de base e.) Esta função $\ln_r$ diz-se o *ramo do logaritmo relativo ao intervalo* $[r, r+2\pi[$. Quando se escolhe $r = -\pi$ diz-se *ramo principal do logaritmo.*

Exemplos:

$\ln_r(i)$ com 1. $r = -\pi$, 2. $r = 0$, e 3. $r = \frac{11\pi}{4}$:

1. $\ln_{-\pi} i = \log|i| + i\arg i \quad (\text{ com } \arg i \in [-\pi,\pi[\,) \quad = \log 1 + i\pi/2 = i\pi/2$
2. $\ln_0 i = \log|i| + i\arg i \quad (\text{ com } \arg i \in [0,2\pi[\,) \quad = \log 1 + i\pi/2 = i\pi/2$
3. $\ln_{\frac{11\pi}{4}} i = \log|i| + i\arg i \quad (\text{ com } \arg i \in [11\pi/4, 19\pi/4[\,) \quad = \log 1 + i9\pi/4 = i9\pi/4$

Seja a um real positivo e considere-se o conjunto

$$C_a = \{ae^{i\theta} \,|\, \theta \in [-\pi,\pi[\}$$

Qual é a imagem de C_a através de $\ln_{-\pi}$?

$$\ln_{-\pi}(ae^{i\theta}) = \log a + i\theta$$

portanto

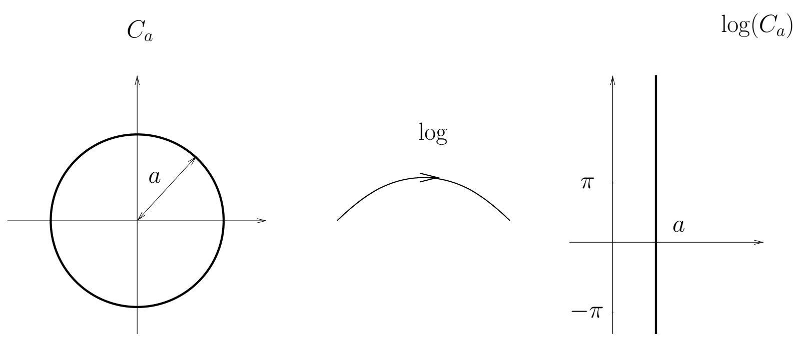


Figure 8: C_a e $\ln_{-\pi}(C_a)$

Seja α um número real e considere-se o conjunto

$$B_\alpha = \{xe^{i\alpha} \,|\, x \text{ é real positivo }\}$$

$$\ln_{-\pi}(xe^{i\alpha}) = \log|x| + i(\alpha + 2k\pi) \quad (\text{ com } \alpha + 2k\pi \in [-\pi,\pi[)$$

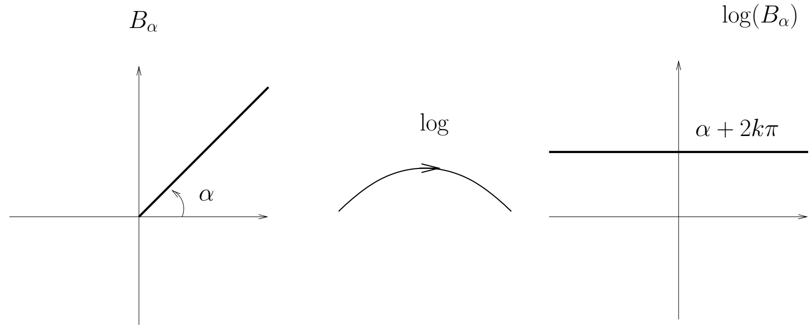


Figure 9: B_α e $\ln_{-\pi}(B_\alpha)$

Proposição 5.3 *Dado um real positivo* r

1. *Para todo o* z *e* w *em* $\mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$ $\quad \ln_r(zw) = \ln_r(z) + \ln_r(w) + i2k\pi$
2. *Para todo o* z *e* w *em* $\mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$ $\quad \ln_r(z/w) = \ln_r(z) - \ln_r(w) + i2k\pi$
3. *Para todo o inteiro positivo* n *e* z *em* $\mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$ $\quad \ln_r(z^n) = n \ln_r(z) + i2k\pi$
4. *Para todo o* $z \in A_r$, $\ln_r(e^z) = z$
5. *Para todo o* z *em* $\mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$ $\quad e^{\ln_r(z)} = z$

Dem:

1. $\ln_r(z) + \ln_r(w) = \log|z| + i\arg(z) + \log|w| + i\arg(w)$ $\quad$ (com $\arg(z), \arg(w) \in [r, r + 2\pi[$) $= \log|z|\,|w| + i\big(\arg(z) + \arg(w)\big) = \log|zw| + i\big(\arg(zw) + 2k\pi\big)$ $\quad$ (com k tal que $\arg(zw) \in [r, r + 2\pi[$) $= \log|zw| + i\arg(zw) + i2k\pi = \ln_r(zw) + i2k\pi$
2. Análoga à anterior;
3. Consequência de 1.;
4. Decorre do facto de serem funções inversas uma da outra;
5. idem

Funções seno e coseno em $\mathbb{C}$:
Para todo o z em $\mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Proposição 5.4 *Propriedades das funções seno e coseno:*

1. $\cos^2 z + \sin^2 = 1$ $\qquad$ *para todo o* z *em* $\mathbb{C}$
2. $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$
3. $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

Dem:

1. $\cos^2 z + \sin^2 = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \frac{\left(e^{iz}\right)}{4}$
2. $\sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\dfrac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} =$
$$= \frac{e^{iz}e^{iw} + e^{iz}e^{-iw} - e^{-iz}e^{iw} - e^{-iz}e^{-iw} + e^{iw}e^{iz} + e^{iw}e^{-iz} - e^{-iw}e^{iz} - e^{-iw}e^{-iz}}{4i} =$$
$$= \frac{2e^{i(z+w)} - 2e^{-i(z+w)}}{4i} = \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2\imath} = \sin(z + w)$$

3. Analogo ao anterior

■

5.4 Funções seno e coseno hiperbólicos

$$\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

5.5 Função potência

Para cada ramo do logaritmo $\ln_r$ e para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, define-se em $\mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$ a função potência:

$$g(z) = z^\alpha := e^{\alpha \ln_r(z)}$$

Proposição 5.5 *Fixado um ramo do logaritmo, para quiasquer números complexos α, α', tem-se, para todo o $z \in \mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$*

$$z^{\alpha+\alpha'} = z^\alpha \cdot z^{\alpha'}$$

5.6 Função exponencial de base β

Para cada ramo do logaritmo $\ln_r$ e para cada $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$, define-se em $\mathbb{C}$ a exponencial de base β:

$$h(z) = \beta^z := e^{z \ln_r(\beta)}$$

6 Limites e Continuidade

Seja f uma função definida num subconjunto Ω de $\mathbb{C}$ e seja $z_0 \in \overline{\Omega}$ (isto é, qualquer vizinhaça centrada em z_0 intersecta Ω).

Diz-se que f tem limite quando z tende para z_0 com o valor L se, para todo o $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que

$$z \in \Omega \text{ e } |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon$$

Nestas circunstâncias, escreve-se

$$\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = l$$

Exemplos:

1.

$$\lim_{z \mapsto 2+i0} (z^2 - 4) = 0 + i0?$$

Tem-se

$$|(z^2 - 4) - (0 + i0)| = |z^2 - 2^2| = |z - 2||z + 2| \leq |z - 2|(|z| + |2|) \leq |z - 2|$$

(o que nos interessa é z próximo de 2; podemos portanto tomar só z's com $|z| \leq 3$)

Então, se dado $(1 >)\epsilon > 0$, quisermos

$$(|(z^2 - 4) - (0 + i0)|) \leq 5|z - 2| < \epsilon$$

devemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$5\delta < \epsilon$$

isto é.

$$\delta < \epsilon/5$$

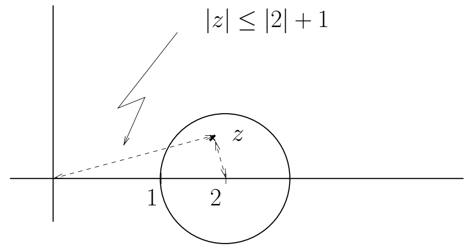


Figure 10: z próximo de 2

Assim, para todos os z's tais que

$$|z - 2| < \delta$$

vem

$$|(z^2 - 4) - (0 + i0)| \leq 5|z - 2| < 5\delta < \epsilon$$

o que prova que

$$\lim_{z \mapsto 2+i0} (z^2 - 4) = 0 + i0$$

2.
Existe?

$$\lim_{z \mapsto 0+i0} \frac{\overline{z}}{z}$$

Se fizermos $z \mapsto 0 + i0$ ao longo de $z = x + i0$ vem

$$\lim_{z \mapsto 0+i0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{\overline{x + i0}}{x + i0} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \mapsto 0} 1 = 1$$

No entanto, se fizermos $z \mapsto 0 + i0$ ao longo de $z = 0 + iy$ vem

$$\lim_{z \mapsto 0+i0} \frac{\overline{z}}{z} = \lim_{y \mapsto 0} \frac{\overline{0 + iy}}{0 + iy} = \lim_{y \mapsto 0} \frac{-y}{y} = \lim_{y \mapsto 0} (-1) = -1$$

Como o limite, caso exista, é único então não existe $\lim_{z \mapsto 0+i0} \frac{\overline{z}}{z}$.

3.
Existe

$$\lim_{z \mapsto 0+i0} \frac{\left(Re(z)\right)^2}{z} \qquad ?$$

Como vimos que $|Re(z)| \leq |z|$, tem-se

$$\frac{|Re(z)|^2}{|z|} \leq \frac{|z|^2}{|z|} = |z| \underset{z \mapsto 0+i0}{\mapsto} 0 + i0$$

donde

$$\lim_{z \mapsto 0+i0} \frac{|Re(z)|^2}{|z|} = 0 + i0$$

donde

$$\lim_{z \mapsto 0+i0} \frac{\left(Re(z)\right)^2}{z} = 0 + i0$$

4.

$$\lim_{z \mapsto 0+i0} \frac{z^2 - 4}{z - 2} = \lim_{z \mapsto 0+i0} \frac{(z - 2)(z + 2)}{z - 2} = \lim_{z \mapsto 0+i0} (z + 2) = 4$$

Proposição 6.1 *Seja f definida num subconjunto Ω de $\mathbb{C}$. Sendo $z = x + iy$, vem*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

onde u e v são as partes real e imaginária de f tal como definimos acima. Seja tambem $z_0 = x_0 + iy_0 \in$ overlineΩ. Então

$$\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = A + iB \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{(x,y) \mapsto (x_0,y_0)} u(x, y) = A \text{ e } \lim_{(x,y) \mapsto (x_0,y_0)} v(x, y) = B$$

■

Exemplo:

$$\lim_{(x,y) \mapsto 0+i0} \left(x^2y^2 + i(x^2 + y^2) \right) = \lim_{(x,y) \mapsto 0+i0} x^2y^2 + i \lim_{(x,y) \mapsto 0+i0} (x^2 + y^2) = 0 + i0$$

6.1 Continuidade

Uma função definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ diz-se contínua num ponto $z_0 \in \Omega$ se

1. Existe $\lim_{z \mapsto z_0} f(z)$;
2. Esse limite é $f(z_0)$

Proposição 6.2 *Seja f definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ com*

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

Seja tambem $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$
f é contínua em z_0 é equivalente a dizer que $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são contínuas em x_0, y_0.

Dem: É uma consequência da Proposição 6.1 acima. ■

Exemplos:
1. $f(z) = \overline{z}$ é contínua em $\mathbb{C}$ porque

$$f(z) = f(x + iy) = \overline{x + iy} = x - iy$$

donde

$$u(x, y) = x \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = -y$$

e como estas funções são contínuas em $\mathbb{R}^2$ (porquê?) então f é contínua em $\mathbb{C}$.
2. $f(z) = e^z$ é contínua em $\mathbb{C}$ porque

$$f(z) = f(x + iy) = e^x(\cos(y) + i \sin(y)) = e^x \cos(y) + ie^x \sin(y)$$

donde

$$u(x, y) = e^x \cos(y) \qquad \text{e} \qquad v(x, y) = e^x \sin(y)$$

que são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$ (porquê?) então f é contínua em $\mathbb{C}$.
3. $f(z) = \ln_r(z)$ é contínua em $\mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$?

$$\ln_r(z) = \log |z| + i \arg(z) \text{ com } \arg(z) \in [r, r + 2\pi[= \log \sqrt{x^2 + y^2} + i \arg(x + iy)$$

Então,

$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \text{contínua em } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

e

$$v(x, y) = \arg(x + iy) \qquad \text{que não é contínua em } \{\rho e^{ir} \mid \rho \geq 0\}$$

Em particular, o ramo principal do logaritmo ($r = -\pi$) é função contínua em $\mathbb{C} \setminus \{x + i0 \mid x \leq 0\}$

O próximo resultado é uma consequência óbvia de as funções complexas se poderem escrever na forma $u + iv$ como temos vindo a usar e do Teorema de Weierstrass para funções contínuas reais:

Proposição 6.3 *Se Ω é um subconjunto fechado e limitado de $\mathbb{C}$ e f é uma função contínua definida em Ω, então*

- *$|f|$ é limitada em Ω isto é, existe $M > 0$ tal que, para todo o $z \in Omega$, $|f(z)| \leq M$;*
- *$|f|$ tem máximo e mínimo em Ω isto é, existem $z_1, z_2 \in \Omega$ tais que $|f(z_1)| = \min |f|$, $|f(z_2)| = \max |f|$*

■

7 Funções holomorfas

Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto (isto é, só contem pontos interiores).
Seja f definida em Ω.
f diz-se diferenciável em $z_0 \in \Omega$ se existe em $\mathbb{C}$ o limite

$$\lim_{z \mapsto z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Em tal situação escreve-se

$$f'(z_0) = \lim_{z \mapsto z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

f diz-se *holomorfa* em Ω se f for diferenciável em todos os pontos de Ω

Proposição 7.1 *Seja f definida no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $z_0 \in \Omega$.*
Se f é diferenciável em z_0 então f é contínua em z_0.

Dem. Para $z \neq z_0$,

$$f(z) - f(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

Então,

$$\lim_{z \mapsto z_0} \big(f(z) - f(z_0)\big) = \lim_{z \mapsto z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \mapsto z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot (0 + i0) = 0 + i0$$

donde

$$0 + i0 = \lim_{z \mapsto z_0} \big(f(z) - f(z_0)\big) = \lim_{z \mapsto z_0} \big(f(z)\big) - f(z_0)$$

isto é,

$$\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = f(z_0)$$

■

Diferenciabilidade versus operações algébricas envolvendo funções:
Sejam f e g funções diferenciáveis num ponto z_0 de um domínio aberto Ω:

- $f + g$ é diferenciável em z_0 e $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$
- fg é diferenciável em z_0 e $(fg)' = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$
- f/g é diferenciável em z_0 $g(z_0) \neq 0 + i0$ e $(f/g)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{\big(g(z_0)\big)^2}$
- $f \circ g$ é diferenciável em z_0 e $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0)$
- Sempre que exista função inversa f^{-1}, f^{-1} é diferenciável em $w_0 = f(z_0)$ e $(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}$

Proposição 7.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e f definida em Ω. Seja ainda $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ e*

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

f é dierenciável em z_0 é equivalente a dizer que f é diferenciável em (x_0, y_0) no sentido de $\mathbb{R}^2$ e

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{cases}$$

e

$$f'(z_0) = f'(x_0+iy_0) = \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases}$$

Dem. Assuma que f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$. Então existe

$$f'(z_0) = \lim_{z \mapsto z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Vamos calcular este limite atrvés de $z \in \{ x + iy_0 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \mapsto z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \mapsto x_0} \frac{(u(x,y_0) + iv(x,y_0)) - (u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0))}{(x+iy_0) - (x_0+iy_0)} = \\ &= \lim_{x \mapsto x_0} \frac{(u(x,y_0) - u(x_0,y_0)) + i(v(x,y_0) - v(x_0,y_0))}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \mapsto x_0} \left(\frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i\frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \right) = \\ &= \lim_{x \mapsto x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \mapsto x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

calculando agora o mesmo limite através de
$z \in \{ x_0 + iy \,|\, y \in \mathbb{R}\}$:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \mapsto z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{y \mapsto y_0} \frac{(u(x_0,y) + iv(x_0,y)) - (u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0))}{(x_0+iy) - (x_0+iy_0)} = \\ &= \lim_{y \mapsto y_0} \frac{(u(x_0,y) - u(x_0,y_0)) + i(v(x_0,y) - v(x_0,y_0))}{i(y - y_0)} = \\ &= \lim_{y \mapsto y_0} \left(\frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} + i\frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{i(y - y_0)} \right) = \\ &= \lim_{y \mapsto y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \mapsto y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{y - y_0} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

Então, se f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$ tem-se

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

em particular,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

conhecidas como *condições de Cauchy-Riemann*

Reciprocamente, se f é diferenciável em (x_0, y_0) no sentido de $\mathbb{R}^2$ e são satisfeitas as condições de Cauchy-Riemann, então f é diferenciável em $z_0 = x_0 + iy_0$ em $\mathbb{C}$. ■

As condições de Cauchy-Riemann não são suficientes para se ter diferenciabilidade (ver práticas).

Exemplos

1. $f(z) = \overline{z}$ para todo o $z \in \mathbb{C}$ não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$ (em particular, não é holomorfa em $\mathbb{C}$, nem em nenhum dos seus subconjuntos). De facto,

$$f(x+iy) = \overline{x+iy} = x - iy \qquad \text{donde} \qquad u(x,y) = 1 \text{ e } v(x,y) = -1$$

Então, em particular,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq -1 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

ou seja, as condições de Cauchy-Riemann não são satisfeitas em nenhum ponto de $\mathbb{C}$, portanto f não é diferenciável em nenhum ponto de $\mathbb{C}$.

2. Seja f definida num aberto Ω de $\mathbb{C}$, não constante, mas só assumindo valores reais. Então f não é diferenciável em nenhum ponto de Ω. De facto, neste caso, $v(x,y) = 0$ para todo o $x + iy \in \Omega$ donde

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Por outro lado, se $\frac{\partial u}{\partial x}$ ou $\frac{\partial u}{\partial y}$ não existirem ou não forem funç oes contínuas, então f não é diferenciável no sentido de $\mathbb{R}^2$ eentão f não é diferenciável em $\mathbb{C}$. Suponhamos então que existem e são funções contínuas $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial u}{\partial y}$. Como f, por hipotese, não é constante e as outras derivadas parciais se anulam, então em cada (x_0, y_0)

$$\frac{\partial v}{\partial x} \neq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \neq 0$$

salvo em pontos isolados. Então não se verificam as condições de Cauchy-Riemann.

3. Seja f a função exponencial, $f(z) = e^z$, para todo o $z \in \mathbb{C}$. f é holomorfa em $\mathbb{C}$.
De facto,

$$f(z) = f(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = \big(e^x\cos(y)\big) + i\big(e^x \sin(y)\big)$$

donde

$$u(x,y) = e^x\cos(y) \quad \text{e} \quad v(x,y) = e^x \sin(y)$$

ambas funções diferenciáveis com derivadas parciais contínuas em $\mathbb{R}^2$. Essas derivadas parciais são:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y & \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \\ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y & \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y \end{cases}$$

e portanto,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

donde f é holomorfa em $\mathbb{C}$ e

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y)0e^z$$

4. Função logarítmica. Para todo o $z \in \mathbb{C} \setminus \{\rho^{ir} \mid \rho \geq 0\}$, vem

$$\frac{d}{dz}\ln_r z = \left.\frac{1}{\frac{d}{dw}(e^w)}\right|_{w=\ln_r z} = \frac{1}{e^{\ln_r z}} = \frac{1}{z}$$

5. Funções trigonométricas.
Recordando, as definições de cos e sin complexos são, para todo o $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Assim,

$$\frac{d}{dz}\cos z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dz}(e^{iz}) + \frac{d}{dz}(e^{-iz})\right) = \frac{1}{2}\left(e^{iz}i + e^{-iz}(-i)\right) = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z)$$

e tambem

$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dz}(e^{iz}) - \frac{d}{dz}(e^{-iz})\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}i - e^{-iz}(-i)\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z)$$

5. Funções hiperbólicas.
Recordando, para todo o $z \in \mathbb{C}$, as funções seno e coseno hiperbólicas são:

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \text{e} \qquad \sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Então,

$$\frac{d}{dz}\cosh(z) = \ldots \text{ (exercício) } \ldots$$

$$\frac{d}{dz}\sinh(z) = \ldots \text{ (exercício) } \ldots$$

6. Função potência. Para um dado ramo do logaritmo, $\ln_r$, e $b \in \mathbb{C}$, a função potência é:

$$f(z) = z^b = e^{b \ln_r(z)}$$

Então

$$\frac{d}{dz} z^b = \frac{d}{dz} e^{b \ln_r(z)} = e^{b \ln_r(z)} b \frac{1}{z} = b z^{b-1}$$

Se f é constante num aberto Ω então f é holomorfa em Ω com $f'(z) = 0$ para todo o $z \in \Omega$.
Reciprocamente,

Proposição 7.3 *Se f é holomorfa num aberto Ω e $f'(z) = 0$ para todo o $z \in \Omega$ então f é constante.*

Dem. Como as funções u e v serão identicamente nulas sobre o $\Omega^\star \subset \mathbb{R}^2$, o resultado segue. ■

8 Integração de funções complexas

8.1 Curvas no plano complexo

Dados números reais $a < b$, chama-se *caminho* em $\mathbb{C}$ a qualquer função contínua

$$\gamma \,:\, [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

À imagem de γ isto é, $\gamma([a, b])$, chama-se *curva* ou *linha* em $\mathbb{C}$ e representa-se por $\gamma*$. Portanto, $\gamma*$ é uma abreviatura de $\gamma([a, b])$. Sendo γ uma função contínua e $[a, b]$ um conjunto fechado e limitado, então $\gamma* = \gamma([a, b])$ é tambem um conjunto fechado e limitado.

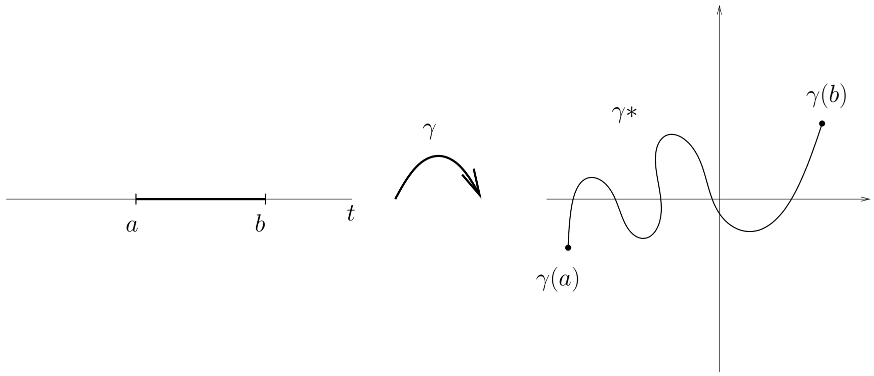


Figure 11: Caminho e curva

Uma equação do tipo

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t) \qquad \text{para cada } t \in [a, b]$$

é chamada *equação paramétrica* da curva. A variável t designa-se por parâmetro do caminho γ.

Ver Figura 11 para uma ilustração dos conceitos de curva caminho e parametrização.

Exemplo:

1.

Considere-se a curva dada por $y = x^2$ para $x \in [-1, 2]$. Eis uma maneira de parametrizá-la:

$$x(t) = t \qquad \text{e} \qquad y(t) = t^2 \qquad t \in [-1, 2]$$

Obtendo-se então

$$\gamma(t) = (t, t^2) \qquad \text{para cada } t \in [-1, 2]$$

2.

Circunferência de centro em $(0, 0)$ e raio 1

$$C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$$

Parametrizações possíveis:

$$\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\gamma_1(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \qquad t \in [0, \pi]$$

$$\gamma_2(t) = (\cos(-t), \sin(-t)) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

Então,

$$\varphi(t) = 2t \quad t \in [o, \pi]$$

é tal que

$$(\gamma \circ \varphi)(t) = \gamma(\varphi(t)) = \gamma(2t) = (\cos(2t), \sin(2t)) = \gamma_1(t) \quad t \in [0, \pi]$$

γ_1 diz-se então uma *reparametrização* de γ (e reciprocamente) de acordo com a segunte definição:

Definição 8.1 *Dados dois caminhos $\gamma : [c, d] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ e $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$, γ_1 diz-se uma reparametrização de γ se existir uma função $\varphi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ contínua e com derivada positiva tal que*

$$\gamma_1(t) = \gamma \circ \varphi(t) \qquad t \in [c, d]$$

Observações:

1. Como φ é contínua e tem derivada positiva, então existe a sua inversa, φ^{-1}, e assim γ é tambem uma reparametrização de γ_1.

2. No exemplo acima γ_2 não é repraparametrização nem de γ nem de γ_1.

Definição 8.2 *Dado um caminho $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ o ponto $A = \gamma(a)$ é o* ponto inicial *ou* origem *da curva $\gamma*$. O ponto $B = \gamma(b)$ é o* ponto terminal *ou* extremidade *dessa curva.*

O sentido do caminho γ é de $A = \gamma(a)$ para $B = \gamma(b)$.

O caminho $(-\gamma)$ definido por $(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$ para todo o $t \in [a, b]$ define sobre a mesma curva um sentido inverso ao do caminho γ.

Quando a origem e a extremidade de uma curva coincidem isto é, $\gamma(a) = \gamma(b)$, a curva diz-se fechada*. Nestas circunstâncias, o seu sentido diz-se* positivo *ou* directo *se é o sentido dos ponteiros do relógio e diz-se* negativo *ou* indirecto *no caso contrário.*

Se $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ só ocorre para $t_1 = t_2 \in]a, b[$ então a curva diz-se simples.

Se existem pontos $a < t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n < b$ tais que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) = \gamma(t_3) = \ldots \gamma(t_n) = P$ então o ponto P de $\gamma*$ diz-se um ponto de multiplicidade n.

Justaposição de caminhos:

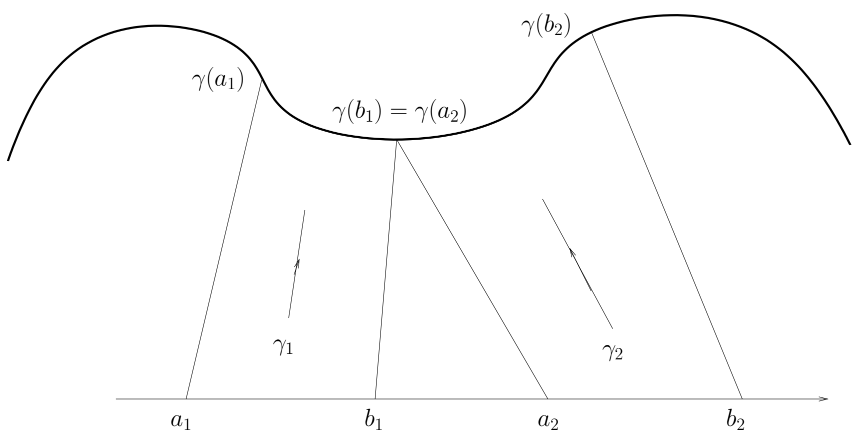


Figure 12: Justaposição de caminhos

Dados os caminhos

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$$

e

$$\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$$

diz-se que o caminho

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t + a_2 - b_1) & t \in [b_1, b_1 + b_2 - a_2] \end{cases}$$

é uma justaposição dos caminhos γ_1 e γ_2 e escreve-se

$$\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$$

Exemplo:

Sejam

$$\gamma_1(t) = (t, t^2) \quad t \in [-1, 2] \qquad\qquad \gamma_2(t) = (t - 1, 4) \quad t \in [3, 4]$$

Então

$$\gamma(t) = \gamma_1(t) \vee \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [-1, 2] \\ \gamma_2(t + 1), & t \in [2, 3] \end{cases}$$

Uma curva γ diz-se *regular* se na sua representação paramétrica $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são funções com derivada contínua.

Se γ é regular então o seu comprimento é finito e é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{\frac{dx}{dt}^2 + \frac{dy}{dt}^2}\, dt = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$$

Exemplo:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\cos t, \qquad 0 \le t \le \frac{3\pi}{2} \\ y(t) &= 2\sin t \end{aligned}$$

Então,

$$L = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t}dt = 2\int_0^{\frac{3\pi}{2}} = 3\pi$$

$\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ diz-se seccionalmente regular se for regular por troços isto é se existirem pontos $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ tais que, para cada $k = 2, \ldots, n$, $\gamma : [c_{k-1}, c_k] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ é regular.

8.2 Homotopia de curvas

A homotopia tem a ver com a possibilidade de transformar por deformação uma figura em outra figura sobre um domínio dado. As figuras que nos vão interessar neste curso são curvas e os domínios serão subconjuntos de $\mathbb{C}$.

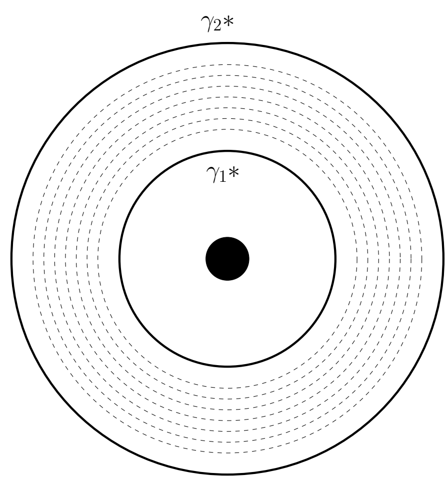


Figure 13: Duas curvas deformáveis (homotopicas) uma na outra. As curvas a tracejado pretendem ilustrar passos intermédios da deformação

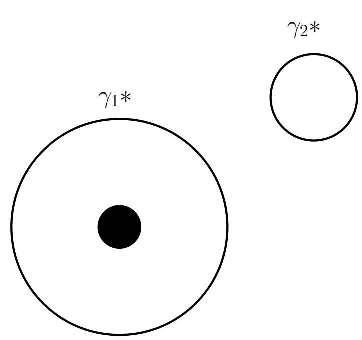


Figure 14: Duas curvas não deformáveis uma na outra. A região escura não pertence ao domínio onde se realiza a homotopia

Definição 8.3 *Sejam* $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ *dois caminhos.*
γ_0 *diz-se* homotopico *a* γ_1 *num conjunto* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *se existir uma função contínua*

$$H : [a,b] \times [0,1] \longrightarrow \Omega$$

tal que

$$H(t,0) = \gamma_0(t) \qquad H(t,1) = \gamma_1(t) \qquad \textit{para todo o } t \in [a,b]$$

À função H chama-se *homotopia* entre γ_0 e γ_1.

Se $H(a,s) = A$ e $H(b,s) = B$ para todo o $s \in [0,1]$, a homotopia diz-se de extremos fixos.

Se $H(a,s) = H(b,s)$ para todo o $s \in [0,1]$, então é uma homotopia de caminhos fechados.

Definição 8.4 *Um domínio diz-se* simplesmente conexo *se toda a curva simples e fechada nele contida é homotopica a um ponto.*

Proposição 8.1 $\mathbb{C}$ *é simplesmente conexo.*

Dem: Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ um caminho. Seja $c \in \mathbb{C}$. A função

$$\begin{aligned} H : [a,b] \times [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (t,s) &\longmapsto H(t,s) = sc + (1-s)\gamma(t) \end{aligned}$$

é uma função contínua e

$$H(t,0) = \gamma(t) \qquad \text{e} \qquad H(t,1) = c \quad \text{para todo o } t \in [a,b]$$

H é então uma homotopia entre o caminho γ e o caminho constante $\gamma_0 \equiv c$ ■

8.3 Integração de funções complexas

Definição 8.5 *Seja*

$$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$f(t) = u(t) + iv(t) \qquad t \in [a,b]$$

Define-se integral de f *em* $[a,b]$ *por*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Observação: $\int_a^b$ é uma operação linear (?)
Exercício: Explicar porquê...

Definição 8.6 *Seja* f *uma função complexa de variável complexa definida num domínio* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *e* $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ *um caminho regular, tal que* $f(\gamma(t))$ *é contínua em para todo o* $t \in [a,b]$.
Define-se então o integral de f *ao longo de* $\gamma*$ *por*

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Note-se que a continuidade de f e a continuidade de γ' (já que γ é regular) garantem a existência do integral $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Como é que se realizam cálculos isto é, dada uma certa função f e uma certa parametrização da curva sobre a qual se quer integrar f, como é que obtemos o valor $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$?

Seja

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

e

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

donde

$$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

e com os abusos de notação habituais

$$dx = x'(t)dt \qquad \text{e} \qquad dy = y'(t)dt$$

Então

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b f(x(t)+iy(t))(x'(t)+iy'(t))dt = \\
&= \int_a^b \Big(u\big(x(t),y(t)\big) + iv\big(x(t),y(t)\big)\Big)\big(x'(t)+iy'(t)\big)dt = \\
&= \int_a^b \Bigg[\Big(u\big(x(t),y(t)\big)x'(t) - v\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big) + i\Big(v\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + u\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\Bigg]dt
\end{aligned}$$

o que nos fornece uma fórmula explicita para o cálculo do integral à custa da parametrização.

E se $\gamma_1 : [c,d] \longrightarrow \Omega$ for uma reparamentrização de γ? Será que o valor do integral se altera?

Se $\gamma_1 : [c,d] \longrightarrow \Omega$ é uma reparamentrização de γ, então existe $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$ contínua e com derivada positiva tal que

$$\gamma_1(t) = (\gamma \circ \varphi)(t) = \gamma(\varphi(t))$$

e então

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_c^d f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))(\gamma(\varphi(t)))'dt = \int_c^d f(\gamma(\varphi(t)))\gamma'(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \dots$$

Faça-se,

$$\begin{aligned}
&s = \varphi(t) \\
&\frac{ds}{dt} = \varphi'(t) \\
&t = c \quad \Rightarrow \quad s = a \\
&t = d \quad \Rightarrow \quad s = b
\end{aligned}$$

donde

$$\dots = \int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = \int_\gamma f(z)dz$$

Concluímos portanto que a reparametrização da curva não altera o valor do integral.

No entanto, parametrizações que não são reparametrizações uma da outra da mesma curva podem originar valores distintos do integral. Consideremos para tal o arco de circunferência de raio 1 e centro em $0+i0$ desde $1+i0$ passando por $0+i1$ até $-1+i0$ com as parametrizações

$$\begin{aligned} \gamma_1 \,:\, [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \cos t + i\sin t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma_2 \,:\, [0,\pi] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \cos(\pi - t) + i\sin(\pi - t) \end{aligned}$$

Seja tambem $f(z) \equiv 1$
Então,

$$\int_{\gamma_1} f = \int_0^{\pi} (-\sin t + i\cos t)dt = \big[\cos t\big]_0^{\pi} + i\big[\sin t\big]_0^{\pi} = (-1-1) + i(0-0) = -2$$

enquanto que

$$\int_{\gamma_2} f = \int_0^{\pi} (\sin(\pi - t) - i\cos(\pi - t))dt = \big[\cos(\pi - t)\big]_0^{\pi} + i\big[\sin(\pi - t)\big]_0^{\pi} = (1-(-1)) + i(0-0) = 2$$

portanto os integrais assumem valores distintos.

O exemplo que acabámos de ver generaliza-se para o seguinte facto:

Proposição 8.2 *Sejam γ e $-\gamma$ parametrizações da mesma curva mas com orientações contrárias, tal como descrito mais atrás. Então,*

$$\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f$$

Dem. Seja

$$\begin{aligned} \gamma \,:\, [a,b] &\longrightarrow \Omega \\ t &\longmapsto x(t) + iy(t) \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} -\gamma \,:\, [a,b] &\longrightarrow \Omega \\ t &\longmapsto x(a+b-t) + iy(a+b-t) \end{aligned}$$

donde

$$\int_{-\gamma} f = \int_a^b f(-\gamma(t))(-\gamma)'(t)dt = \int_a^b f\big(x(a+b-t) + iy(a+b-t)\big)\big(x(a+b-t) + iy(a+b-t)\big)'dt =$$
$$= \int_a^b \Big(u\big(x(a+b-t), y(a+b-t)\big) + iv\big(x(a+b-t), y(a+b-t)\big)\Big)\big(-x'(a+b-t) - iy'(a+b-t)\big)dt =$$
$$= \int_a^b \Big(-u\big(x(a+b-t), y(a+b-t)\big)x'(a+b-t) + v\big(x(a+b-t), y(a+b-t)\big)y'(a+b-t)\Big) -$$
$$- i\Big(u\big(x(a+b-t), y(a+b-t)\big)y'(a+b-t) + v\big(x(a+b-t), y(a+b-t)\big)x'(a+b-t)\Big)dt = \ldots$$

e fazendo

$$
\begin{aligned}
&s = a + b - t\\
&\frac{ds}{dt} = -1\\
&t = a \quad \Rightarrow \quad s = b\\
&t = b \quad \Rightarrow \quad s = a
\end{aligned}
$$

vem

$$
\begin{aligned}
\ldots &= \int_b^a \Big(-u\big(x(s),y(s)\big)x'(s) + v\big(x(s),y(s)\big)y'(s) \Big) - i\Big(u\big(x(s),y(s)\big)y'(s) + v\big(x(s),y(s)\big)x'(s) \Big)(-1)ds = \\
&= -\int_a^b \Big(u\big(x(s),y(s)\big)x'(s) - v\big(x(s),y(s)\big)y'(s) \Big) + i\Big(u\big(x(s),y(s)\big)y'(s) + v\big(x(s),y(s)\big)x'(s) \Big)ds = \\
&= -\int_a^b \Big(u\big(x(s),y(s)\big) + iv\big(x(s),y(s)\big) \Big)\Big(x'(s) + iy'(s) \Big)ds = -\int_\gamma f
\end{aligned}
$$

■

Exemplos

1. Calcular $\int_\gamma z^2 dz$ onde γ é o segmento de recta que une os pontos $z_0 = -i$ e $z_1 = 2 + i$, orientada de z_0 e z_1.

   A função $f(z) = z^2$ é contínua sobre γ, que é regular e pode ser representada parametricamente por

   $$
   \begin{aligned}
   &x(t) = t\\
   &y(t) = t - 1, \quad 0 \leq t \leq 2
   \end{aligned}
   $$

   donde

   $$\int_\gamma f = \int_0^2 [t + i(t-1)]^2 (1+i)dt = \cdots = \frac{2}{3}(1+5i)$$

2. Calcular $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$ onde γ é a circunferência de centro na origem e raio 1, orientada no sentido positivo. Uma representação parametrica de γ é dada por $\gamma(t) = e^{it}$ com $0 \leq t \leq 2\pi$. Esta função $f(z) = \frac{1}{z}$ está definida em $\mathbb{C} \setminus \{0 + i0\}$ e é contínua sobre a curva regular γ. Então

   $$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i$$

3. Analogamente para $\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz$ onde γ é a circunferência de centro z_0 e raio r orientada no sentido positivo, que tem por representação parametrica

   $$\gamma(t) = z_0 + re^{it} \qquad 0 \leq t \leq 2\pi$$

   obtem-se

   $$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{it}} ire^{it} dt = 2\pi i$$

Exercício: completar os cálculos.

Propriedades do integral.

Proposição 8.3 *Sejam f e g funções contínuas sobre uma curva regular γ, α e β constantes complexas.*

$$\int_\gamma (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_\gamma f + \beta \int_\gamma g$$

■

Proposição 8.4 *Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ uma curva regular e f uma função contínua sobre γ. Seja $c \in \mathbb{R}$ tal que $a < c < b$ e sejam $\gamma_1 = \gamma\big|_{[a,c]}$ e $\gamma_2 = \gamma\big|_{[c,d]}$ (donde $\gamma = \gamma_1 \vee \gamma_2$). Então,*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

Dem. (Esboço de...)

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^c f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_c^d f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^c f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt + \int_c^d f(\gamma_2(t))\gamma_2'(t)dt =$$
$$= \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

Proposição 8.5 (Teorema fundamental do cálculo integral) *Seja f uma função contínua num domínio Ω e γ uma curva (seccionalmente) regular contida em Ω de origem z_1 e extremidade z_2. Se existe F diferenciá vel em Ω tal que $F' = f$ em Ω, então*

$$\int_\gamma f = F(z_1) - F(z_2)$$

Dem (esboço de...)

$$\int_\gamma f = \int_\gamma F' = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\gamma(t)))dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1)$$

■

Note-se, que para funções nas condições da Proposição, o integral não depende da curva que liga $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$!

Exemplo: Sendo γ uma parametrização do segmento de recta que une $-i$ a $2+i$ (de $-i$ para $2+i$)

$$\int_\gamma z^2 dz = \frac{1}{3}\left[z^3\right]_{-i}^{2+i} = \frac{1}{3}\big((2+i)^3 - (-i)^3\big) = \frac{1}{3}\big(2^3 + 3\cdot 2^2 i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3 - i\big) = \frac{1}{3}\big((8-6) + i(12-2)\big) =$$
$$= \frac{1}{3}(2 + i10) = \frac{2}{3}(1+5i)$$

Corolário 8.1 *Nas condições da Proposição anterior, se a curva é fechada então:*

$$\int_\gamma f = 0$$

Dem: Aplicar a fórmula do Teorema fundamental do cálculo notando que sendo a curva fechada, $F(z_1) = F(z_2)$. ■

Proposição 8.6 *Seja f uma função contínua sobre a curva regular γ de comprimento L. Como f é limitada, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ pata todo o $z \in \gamma$. Tem-se então:*

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq ML$$

Dem.

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq \left|\int_\gamma f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \int_a^b M|\gamma'(t)|dt = M\int_a^b |\gamma'(t)|dt = ML$$

■

9 Teorema de Cauchy e Aplicações

O Teorema de Cauchy tem a ver inicialmente com funções holomorfas sobre domínios simplesmente conexo isto é um subconjunto de $\mathbb{C}$ tal que qualquer sua curva fechada se deforma num ponto.

Proposição 9.1 (Teorema de Cauchy) *Se f é uma função holomorfa num domínio simplesmente conexo Ω e γ é uma curva fechada seccionalmente regular contida em Ω, então*

$$\int_\gamma f = 0$$

Dem. (Esboço de...). Observamos que este resultado é verdadeiro para curvas simples (isto é sem pontos de multiplicidade superior a 1) e para funções f cujas parte real, u, e imaginária, v, são funções diferenciáveis com derivada contínua. Nestas circunstâncias

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f &= \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx) = \\
&= \iint_D (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})dxdy + i\iint_D (\frac{\partial u}{\partial x}dy - \frac{\partial v}{\partial y}dx) \text{ (pelo Teorema de Green no plano) } = \\
&= \iint_D 0dxdy + i\iint_D 0dxdy = 0
\end{aligned}$$

Finalmente, uma curva fechada pode ser encarada como uma união finita de curvas simples fechadas onde o resultado acima é válido....

■

Exemplo: Calcular $\int_\gamma e^z dz$ onde γ é uma curva fechada seccionalmente regular. Como $f(z) = e^z$ para todo o z em $\mathbb{C}$ é um função holomorfa, então

$$\int_\gamma e^z dz = 0$$

Proposição 9.2 *Seja f uma função holomorfa num domínio Ω simplesmente conexo e sejam z_0 e z_1 dois elementos de Ω. Se γ_1 e γ_2 são duas curvas em Ω ambas com origem em z_1 e extremidade em z_2, então*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

Dem. Seja

$$\gamma = \gamma_1 \vee (-\gamma_2)$$

Então γ é um caminho fechado contido em Ω e pelo Teorema de Cauchy (proposição anterior) o integral de f sobre γ é nulo. Então:

$$0 = \int_\gamma = \int_{\gamma_1} f + \int_{-\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

e portanto

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

■

Nestas condições, para calcular o integral entre dois pontos de um domínio onde a função integranda é holomorfa, podemos escolher o caminho que simplifica os cálculos, pois o resultado acima afirma a independência do valor do integralem relação ao caminho escolhido.

Proposição 9.3 *Seja f uma função holomorfa num domínio simplesmente conexo Ω. Então existe uma função F holomorfa em Ω, única a menos de uma constante, tal que $F' = f$ isto é, f admite uma primitiva em Ω.*

Dem: Fixando $u \in \Omega$, seja $F\ \ \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \int_u^z f$$

em que $\int_u^z$ designa o integral ao longo de qualquer caminho ligando u a z, que existe e está bem definido já que Ω é simplesmente conexo. Então fixado $v \in \nleq$ e para $z \in \nleq$, gostaríamos de saber o limite da razão incremental:

$$\begin{aligned}\frac{F(z)-F(v)}{z-v} - f(v) &= \frac{\int_u^z f - \int_u^v f}{z-v} - f(v) = \frac{\int_v^u f + \int_u^z f - (z-v)f(v)}{z-v} = \\ &= \frac{\int_v^z f - (z-v)f(v)}{z-v} = \frac{\int_v^z f - \int_v^z f(v)dw}{z-v} = \frac{\int_v^z (f(w)-f(v))dw}{z-v}\end{aligned}$$

Como f é função contínua, então dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|w-v| < \delta \text{ e } w, v \in \Omega \Longrightarrow |f(w)-f(v)| < \epsilon$$

Tomando z tal que $|z-v| < \delta$, faz sentido fazer a integração $\int_v^z$ ao longo do segmento de recta que une v a z, de acordo com a proposição anterior. Como o w, variável de integração, pertence a este segmento de recta, tem-se $|w-v| \leq |z-v| < \delta$, donde

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(z)-F(v)}{z-v} - f(v)\right| &= \left|\frac{\int_v^z (f(w)-f(v))dw}{z-v}\right| \leq \frac{1}{|z-v|}\int_v^z |\big(f(w)-f(v)\big)dw| \leq \\ &\leq \frac{1}{|z-v|}\int_v^z |\big(f(w)-f(v)\big)|dw \leq \frac{1}{|z-v|}\int_v^z \epsilon dw \leq= \frac{1}{|z-v|}\epsilon|z-v| = \epsilon\end{aligned}$$

ou seja

$$\lim_{z \mapsto v} \frac{F(z)-F(v)}{z-v} = f(v)$$

isto é, para cada $v \in \Omega$, $F'(v) = f(v)$. F é, então, uma primitiva de f em Ω.

Se G é outra primitiva de f em Ω, tem-se $(F-G)' = f - f = 0$ e sendo Ω um domínio, $F - G$ é constante em Ω. F é portanto holomorfa e é a primitiva de f em Ω, sendo única a menos de constante. ■

Note-se que este resultado afirma a existência de uma função, F, primitiva da f dada, holomorfa num domínio simplesmente conexo. Essa função F, da variável z, é construída formalmente como o integral desde um u previamente fixado, até z, da função dada f. Entretanto, gostamos de escrever as nossas funções explicitamente à custa da variável e usando funções familiares como polinómios, funções racionais, exponenciais, logaritmos, senos e cosenos, etc. Qual será, nesta forma que acabámos de descrever, o aspecto de

$$F(z) = \int_0^z e^{-z^2} dz$$

definida para todo o $z \in \mathbb{C}$?

Proposição 9.4 (Teorema da deformação) *Seja f uma função holomorfa num domínio Ω -* **não necessariamente simplesmente conexo**. *Para quaisquer duas curvas fechadas γ_1 e γ_2, seccionalmente regulares e homotopicas em Ω, tem-se*

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

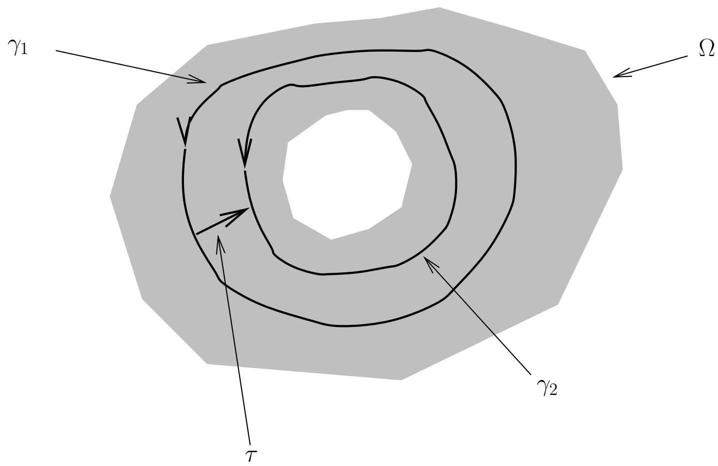


Figure 15: Duas curvas deformáveis uma na outra ao longo de um domínio, Ω, que não é simplesmente conexo

Dem. Sendo as duas curvas homotopicas, é possível definir uma curva τ, ligando um ponto de γ_1 a γ_2 (ver Figura 15).

Seja então γ a curva fechada formada pela justaposição:

$$\gamma = \gamma_1 \vee \tau \vee (-\gamma_2) \vee (-\tau)$$

Tem-se:

$$0 = \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_\tau f + \int_{-\gamma_2} f + \int_{-\tau} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{-\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f$$

donde

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$$

■

Como calculámos mais atrás que o integral de $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ sobre uma circunferência de raio r e centro em z_0 é $2\pi i$, tem-se, para toda a curva fechada γ seccionalmente regular contendo z_0 no seu interior:

$$\int_\gamma \frac{1}{z - z_0} = 2\pi i$$

Definição 9.1 *Dado um domínio limitado, Ω, chama-se* bordo orientado *de Ω ao conjunto das curvas que delimitam Ω, orientadas de modo a deixar o domínio à esquerda. Ver Figura 16.*

Proposição 9.5 (Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos) *Seja Γ o bordo orientado do domínio Ω. Seja f holomorfa sobre Ω. Tem-se:*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 0$$

Dem: Considere a Figura 16 e decomponha a integração de f sobre Γ em

$$\int_\Gamma f = \int_{a_1\to d_1\to c_1\to b_1\to a_1} f + \int_{a_2\to a_1\to b_1\to c_1\to d_1\to d_2\to c_2\to b_2\to a_2} f +$$
$$+ \int_{a_3\to a_2\to b_2\to c_2\to d_2\to d_3\to c_3\to b_3\to a_3} f + \int_{a_4\to a_3\to b_3\to c_3\to d_3\to d_4\to c_4\to b_4\to a_4} f + \int_{a_4\to b_4\to c_4\to d_4\to 4} f$$

Do lado direito da igualdade, cada um dos integrais é o integral da função holomorfa f sobre um domínio simplesmente conexo. Pelo Teorema de Cauchy, cada um destes integrais é igual a $0 + i0$. Note-se que as contribuições dos integrais sobre as linhas τ_i e τ_i' se cancelam na soma.

Finalmente, note-se que é a clara a generalização para n γ_i. ■

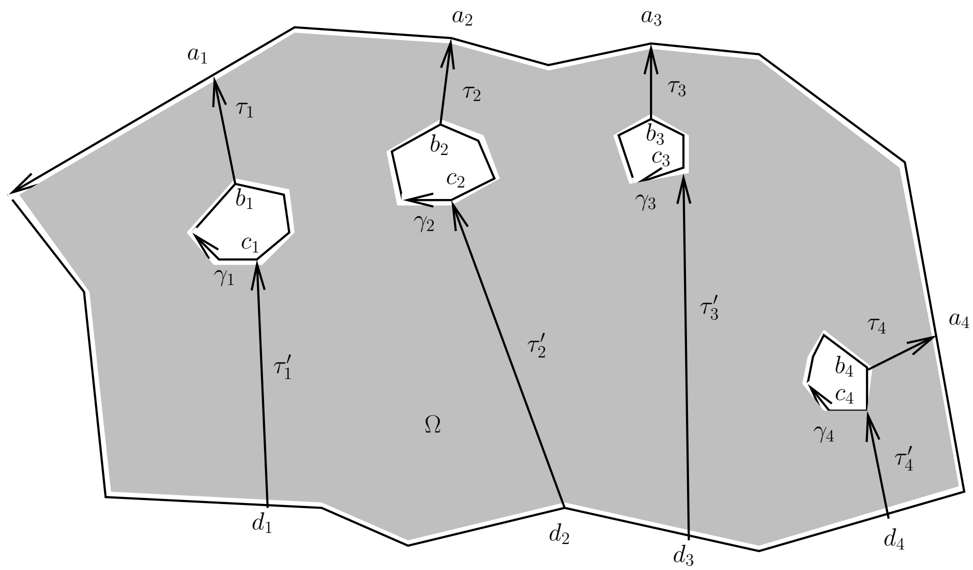


Figure 16: O bordo de um domínio Ω: γ

Corolário 9.1 *Nas condições da Proposição anterior,*

$$\int_\gamma f = \int_{-\gamma_1} f + \cdots + \int_{-\gamma_n} f$$

■

Exemplos: Calcular

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1} dz$$

onde γ é uma circunferência de raio $r > 1$, centro na origem e orientada no sentido directo. Sejam γ_1 e γ_2 circunferências centradas em -1 e 1, respectivamente, de raios $\frac{1}{2}$, orientadas tambem no sentido directo (ver Figura 17). Por aplicação do resultado anterior tem-se:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z^2-1} &= \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} - \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z+1}\right) + \frac{1}{2}\left(\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1} - \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z-1}\right) = \\ &= \frac{1}{2}(0-2\pi i) + \frac{1}{2}(2\pi i - 0)\end{aligned}$$

porque $\frac{1}{z-1}$ é holomorfa sobre γ_1 e sobre o domínio delimitado por γ_1, donde $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-1} = 0$; e porque $\frac{1}{z+1}$ é holomorfa sobre γ_2 e sobre o domínio delimitado por γ_2, donde $\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z+1} = 0$

10 Consequências do Teorema de Cauchy

10.1 Fórmulas integrais de Cauchy

Proposição 10.1 (Fórmula integral de Cauchy) *Seja Ω um domínio simplesmente conexo , f uma função holomorfa em Ω e γ uma curva simples, fechada e regular contida em Ω. Então para todo o ponto z_0 interior a γ,*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

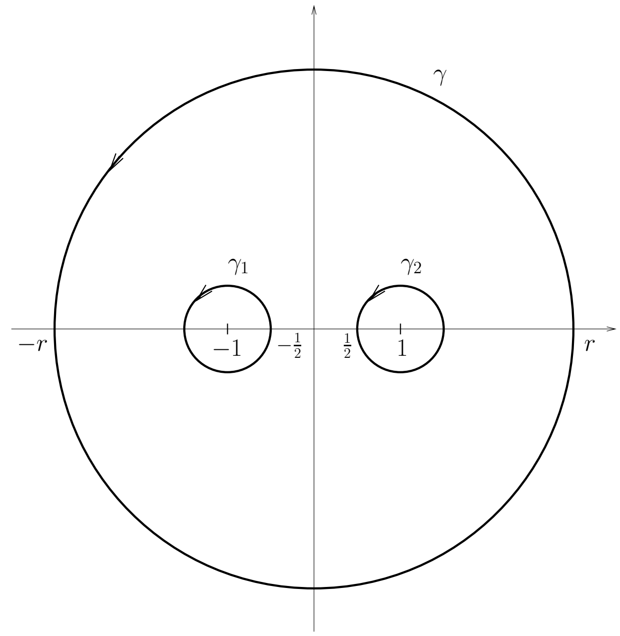


Figure 17: Circunferências: de raio $r > 1$ e centro em $0 + i0$ e de raios $\frac{1}{2}$ e centros em $1 + i0$ e $-1 + i0$, respectivamente

Dem: Seja z_0 um ponto interior a γ em Ω e seja

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0} \qquad \text{para todo o } z \in \Omega \setminus \{z_0\}$$

Esta é uma função holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$. Pelo Teorema da deformação, podemos substituir, no integral, γ por uma circunferência, C_r, de raio $r > 0$ e centro em z_0 sem alterar o valor do integral. Assim,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{C_r} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \frac{f(z_0)}{z - z_0} \right) dz =$$
$$= \int_{C_r} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) dz + f(z_0) \int_{C_r} \left(\frac{1}{z - z_0} \right) dz = \int_{C_r} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) dz + f(z_0) \cdot 2\pi i$$

Falta ver que

$$\int_{C_r} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) dz = 0$$

Como $|z - z_0| = r$ já que $z \in C$, e sendo f contínua sobre C, então existe mx́imo:

$$\max_{z \in C_r} |f(z) - f(z_0)| := M_r \underset{r \longmapsto 0}{\longrightarrow} 0$$

Pela Proposição 8.6

$$\left| \int_{C_r} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) dz \right| \leq \frac{1}{r} M_r \cdot 2\pi r = 2\pi M_r \underset{r \longmapsto 0}{\longrightarrow} 0$$

e como o integral é independente de r, conclui-se que

$$\int_{C_r} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right) dz = 0 \qquad \text{para qualquer } r > 0$$

Tem-se, portanto

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

■

Calculemos, novamente

$$\int_C \frac{dz}{z^2-1} = \dots$$

onde C é uma circunferência de raio $r > 1$ de centro na origem e orientada no sentido directo. Por aplicação do Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos (Proposição 9.5),

$$\dots = \int_{C_1} \frac{dz}{z^2-1} + \int_{C_2} \frac{dz}{z^2-1} = \dots$$

onde C_1 é uma circunferência de centro em -1 e raio $r-1$ e C_2 é uma circunferência de centro 1 e raio $r-1$,

$$\dots = \int_{C_1} \frac{\frac{1}{z-1}}{z+1}dz + \int_{C_2} \frac{\frac{1}{z+1}}{z-1}dz = 2\pi i \frac{1}{z-1}\bigg|_{z=-1} + 2\pi i \frac{1}{z+1}\bigg|_{z=1} = 0$$

onde na penúltima passagem se aplicou a fórmula integral de Cauchy às funções

$$f_1(z) = \frac{1}{z-1} \qquad \text{e} \qquad f_2(z) = \frac{1}{z+1}$$

Proposição 10.2 (Fórmula integral de Cauchy para a primeira derivada) *Seja Ω um domínio simplesmente conexo , f uma função holomorfa em Ω e γ uma curva simples, fechada e regular contida em Ω. Então para todo o ponto z_0 interior a γ,*

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

Dem: Seja z_0 um ponto interior a γ em Ω e seja h tal que $z_0 + h$ ainda é interior a γ. Ent˜ ao por aplicação da fórmula integral de Cauchy (Proposição anterior)

$$f(z_0+h) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-(z_0+h)}dz \qquad \text{e } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$$

Então,

$$\begin{aligned}\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{z-(z_0+h)} - \frac{f(z)}{z-z_0}\right)\frac{1}{h}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)}dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\frac{f(z)}{(z-z_0)^2} + \left(\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-h)} - \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\right)\right)dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}f(z)dz\end{aligned}$$

Só falta mostrar que

$$I(h) = \int_\gamma \frac{h}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)}f(z)dz \quad \underset{h\mapsto 0}{\longrightarrow} 0$$

Como f é holomorfa sobre γ então f é limitada sobre γ ist é, existe um real positivo M tal que $|f(z)| \leq M$ para todo o $z \in \gamma$. Seja tambem

$$L = \inf_{z\in\gamma}|z-z_0|$$

e seja h tal que $|h| \leq \frac{L}{2}$. Então $|z-z_0-h| \geq \frac{L}{2}$ e assim,

$$|I(h)| \leq \int_\gamma \frac{|h|}{|z-z_0|^2|z-z_0-h|}|f(z)|dz \leq M\frac{|h|}{L^2\frac{L}{2}}|\gamma| \underset{h\longmapsto 0}{\to} 0$$

em que $|\gamma|$ designa o comprimento de γ. Conclui-se portanto que $I(h) \underset{h\mapsto 0}{\to} 0$ e portanto

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

■

Aplicando o método de indução finita, obtem-se, para qualquer ordem n

Proposição 10.3 (Fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n) *Seja Ω um domínio simplesmente conexo , f uma função holomorfa em Ω e γ uma curva simples, fechada e regular contida em Ω. Então para todo o ponto z_0 interior a γ,*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

■

Corolário 10.1 *Seja Ω um domínio simplesmente conexo , f uma função holomorfa em Ω e γ uma curva simples, fechada e regular contida em Ω. Então, f é indefinidamente diferenciável em todo o ponto z_0 interior a γ. Em particular, qualquer derivada de f é uma função holomorfa em Ω.*

■

Observamos que as fórmulas integrais de Cauchy são válidas substituindo “Ω simplesmente conexo” por “Ω multiplamente conexo”.

Calcular $\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^4}dz$

A função $f(z) = e^z$ para todo o $z \in \mathbb{C}$, é uma função inteira isto é, é holomorfa sobre $\mathbb{C}$. Tem-se ainda $f^n(z) = e^z$, para todo o $z \in \mathbb{C}$. Então por aplicação da Fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem n (Proposição 10.3) a $f(z) = e^z$ e a $z_0 = 1$,

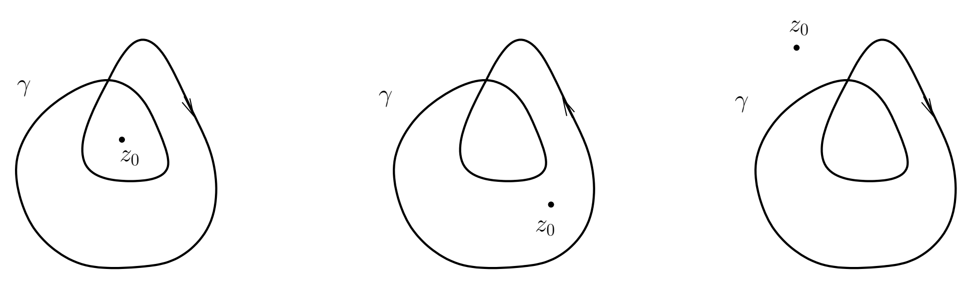
$$e = \frac{3!}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^4}dz$$

e portanto

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)^4}dz = \frac{e\pi i}{3}$$

Nas Proposições acima tambem podemos usar curvas fechadas γ que não são necessariamene simples. Assim as fórmulas integrais de Cauchy ganham um factor que conta o número de voltas que γ efectua em torno de z_0; é positivo se as voltas forem dadas no sentido positivo e é negativo se as voltas forem dadas no sentido negativo. Esse factor designa-se *índice da curva γ em torno de z_0* e denota-se $I(\gamma, z_0)$. Com este factor as fórmulas integrais de Cauchy escrevem-se:

$$I(\gamma, z_0)f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$



$I(\gamma, z_0) = -2$ $\qquad$ $I(\gamma, z_0) = 1$ $\qquad$ $I(\gamma, z_0) = 0$

Figure 18: Índices de pontos em relação a curvas

O índice da curva é então obtido fazendo $f \equiv 1$:

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}$$

Calcular $\int_\gamma \frac{z^2 dz}{(z-i)^3}$, em que γ é a curva definida parametricamente por $\gamma(t) = 2e^{it}, \quad t \in [0, 4\pi]$ - "duas voltas".

O índice da curva γ em relação ao ponto $z_0 = i$ é 2, já que z_0 é interior à curva.

Então, considerando a função inteira $f(z) = z^2$, tem-se

$$\frac{2!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z^2}{(z-i)^3} dz = I(\gamma, i) f''(i) = 2 \cdot 2 = 4$$

donde

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z-i)^3} dz = 4\pi i$$

10.2 Consequências da fórmula integral de Cauchy

Proposição 10.4 (Teorema de Morera) *Seja f uma função contínua num domínio Ω e tal que $\int_\gamma f(z)dz = 0$,* **para qualquer curva** *γ fechada, seccionalmente regular, contida em Ω.*

Então, f é holomorfa em Ω.

Dem. Se $\int_\gamma f(z)dz = 0$, para qualquer curva γ fechada, seccionalmente regular, contida em Ω, o integral é independente da curva ligando quaisquer dois pontos de Ω. Tome-se então $z_0 \in \Omega$ e seja $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw$$

Então, $F'(z) = f(z)$, para cada $z \in \Omega$ e portanto F é holomorfa em Ω. A fórmula integral de Cauchy para as sucessivas derivadas garante que F tem derivadas de todas as ordens em Ω. Em particular, $F'' = f'$ existe em Ω donde f é holomorfa em Ω. ■

Proposição 10.5 (Desigualdades de Cauchy) *Seja f uma função holomorfa no disco $\overline{B}(z_0, r)$ com $r > 0$ e seja $M > 0$ tal que $|f(z)| \geq M$ para $|z - z_0| = r$- Então,*

$$\left|f^{(n)} f(z_0)\right| \leq M \frac{n!}{r^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

Dem. S˜ ao verificadas as hipoteses da fórmula integral de Cauchy para as derivadas, pelo que, para a circunferência C de centro z_0 e raio $r (= |z - z_0|)$, tem-se

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Então,

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_C \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^{n+1}} |dz| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} \int_C |dz| = \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{n! M}{r^n}$$

■

Proposição 10.6 (Teorema de Liouville) *Toda a função inteira e limitada em $\mathbb{C}$, é constante em $\mathbb{C}$.*

Dem. Como f é limitada em $\mathbb{C}$, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ em $\mathbb{C}$. Aplicando a desigualdade de Cauchy (Proposição 10.5) para $n = 1$ obtem-se $|f'(z_0)| \leq \frac{M}{r}$, para cada $z_0 in \mathbb{C}$ e para todo o $r > 0$.

Como esta desigualdade é válida para valores de r arbitrariamente grandes, já que f é inteira, tem-se

$$f'(z_0) = 0 \qquad \text{para qualquer } z_0 \in \mathbb{C}$$

Logo, f é constante em $\mathbb{C}$. ■

Comparar este resultado com o que se passa com as funções **reais** sin e cos.

Proposição 10.7 (Teorema fundamental da álgebra) *Seja*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n$$

um polinómio de grau n (para um certo $n \in \mathbb{N}$), com $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$. Então, $P(z)$ tem pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$ isto é, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $P(z_0) = 0$.

Dem. Por redução ao absurdo, suponha-se que $P(z)$ não tem raízes em $\mathbb{C}$. Então a função

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

é uma função inteira e

$$\lim_{z\mapsto\infty} f(z) = \lim_{z\mapsto\infty} \frac{1}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n} = \lim_{z\mapsto\infty} \frac{\frac{1}{z^n}}{\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \frac{a_3}{z^{n-3}} + \cdots + a_n} = 0$$

já que $a_n \neq 0$

Como $\lim_{z\mapsto\infty} f(z) = 0$ então existe $L > 0$ tal que $|f(z)| < L$ sempre que $|z| > 1$ isto é, f é limitada no exterior do disco $B(0,1)$. Por outro lado, na aderência deste disco a função é limitada já que sendo holomorfa em $\mathbb{C}$ ela é contínua em $\mathbb{C}$. Então f é limitada em $\mathbb{C}$ e pelo Teorema de Liouville f é constante em $\mathbb{C}$ o que implica que P é constante em $\mathbb{C}$. Mas como $a_n \neq 0$, então isto é absurdo. Conclusão: P tem de ter pelo menos uma raiz em $\mathbb{C}$. ■

Corolário 10.2 *Todo o polinómio em $\mathbb{C}$ de grau n se factoriza no produto de a_n e n factores do tipo $z - z_i$, em que os z_i não são todos necessariamente distintos:*

$$P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\cdots(z - z_n)$$

Dem: Exercício. ■

Proposição 10.8 (Teorema do valor médio) *Seja f holomorfa em $\overline{B(z_0, r)}$, com $z_0 \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Então*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

Dem. Por aplicação da fórmula integral de Cauchy à função f em $\overline{B(z_0, r)}$, tem-se

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)dz}{z - z_0}$$

Seja $z = \gamma(t) = z_0 + re^{it}$ com $t \in [0, 2\pi]$ uma parametrização da circunferência $|z - z_0| = r$. Então,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt$$

■

11 Séries

Sucessões de funções

Exemplo:

$$f_n(z) = z^n$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos uma função

$$f_n : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

criando assim uma sucessão de funções.

Definição 11.1 *Seja então (f_n) uma sucessão de funções em que, para cada $n \in \mathbb{N}$*

$$f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

- *Diz-se que a sucessão de funções* converge pontualmente, *se existe o limite, para cada $z \in \Omega$,*

$$\lim_{n \mapsto \infty} f_n(z) \quad \text{chamando então a esse limite } f(z) \text{isto é, } \lim_{n \mapsto \infty} f_n(z) = f(z)$$

  ou seja, para cada $z \in \Omega$ tem-se

$$\text{para todo o } \epsilon > 0 \text{ existe um } N_{z,\epsilon} \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Longrightarrow |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

- *Diz-se que a sucessão (f_n)* converge uniformemente *se,*

$$\text{para todo o } \epsilon > 0 \text{ existe um } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Longrightarrow \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

  ou equivalentemente

$$\lim \sup_{z \in \Omega} |f_n(z) - f(z)| = 0$$

Exemplo:

$$f_n(z) = z^n$$

converge uniformemente em Ω fechado e limitado contido em $B(0+i0, 1)$, mas não converge uniformemente em $B(0 + i0, 1)$.

De facto, para cada $r > 0$, no conjunto

$$\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

tem-se

$$\lim \sup_{z \in \Omega_r} |z^n - 0| = \lim \sup_{z \in \Omega_r} |z^n| = \lim \sup_{z \in \Omega_r} r^n = \lim r^n = 0$$

Definição 11.2 (Série de funções) *Seja (f_n) uma sucessão de funções definidas em $\Omega \subset \mathbb{C}$. Seja, para cada $N \in \mathbb{N}$,*

$$S_N = f_p + f_{p+1} + \cdots + f_{N-1} + f_N$$

isto é, a sucessão das somas parciais da série de funções

$$\sum_{n=p}^{\infty} f_n$$

- *Diz-se que a série de funções $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ converge pontualmente em Ω se a sucessão das somas parciais S_N convergir pontualmente em Ω. Neste caso escreve-se*

$$S(z) = \lim S_N(z) \text{ e tambem } \sum_{n=p}^{\infty} f_n = S$$

- *Diz-se que a série de funções $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ converge uniformemente em Ω se a sucessão das somas parciais S_N convergir uniformemente em Ω.*

Exemplo:

A série
$$\sum_{n=p}^{\infty} z^n$$
converge uniformemente em Ω fechado e limitado contido em $B(0+i0,1)$ mas não converge uniformemente em $B(0+i0,1)$.

De facto, dado $r>0$ no conjunto
$$\Omega_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$
e relembrando que
$$S_N := \sum n = 0N z^n = \frac{1}{-} z^{N+1} 1 - z$$
tem-se
$$\lim \sup_{z\in\Omega_r} |S_N - \frac{1}{1-z}| = \lim \sup_{z\in\Omega_r} |\frac{1-z^{N+1}-1}{1-z}| \leq \lim \sup_{z\in\Omega_r} \frac{|z|^{N+1}}{|1-z|} \leq \lim \sup_{z\in\Omega_r} \frac{|z|^{N+1}}{1-|z|} \leq \lim \sup_{z\in\Omega_r} \frac{|r|^{N+1}}{1-|r|} = 0$$

Proposição 11.1 (Critério de Weierstrass para a convergência uniforme) *Seja Ω um domínio contido em $\mathbb{C}$ e $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ uma série de funções. Suponha-se que existe um sucessão de números positivos (u_n) tais que $|f_n(z)| \leq u_n$ para todo o $z \in \Omega$. Então*

$$\text{Se a série } \sum_{n=p}^{\infty} u_n \text{ for convergente, então a série } \sum_{n=p}^{\infty} f_n \text{ converge uniformemente em } \Omega$$

Dem:(Esboço de...)
$$\begin{aligned} |S_N - s_{N'}| &= |u_{N'+1} + u_{N'+2} + \cdots + u_N| = |u_{N'+1}| + |u_{N'+2}| + \cdots + |u_N| \geq \\ &\geq \left(\sup_{z\in\Omega}\right) |f_{N'+1}(z)| + |f_{N'+2}(z)| + \cdots + |f_N(z)| = |\sup_{z\in\Omega} T_N^f(z) - \sup_{z\in\Omega} T_{N'}^f(z)| \end{aligned}$$
então a sucessão $\left(\sup_{z\in\Omega} T_N^f(z)\right)$ é Cauchy e portanto converge ou seja $\left(T_N^f(z)\right)$ converge uniformemente. Em particular, a série $\left(S_N^f(z)\right)$ converge uniformemente. ■

Exemplo

A série de funções
$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$
converge uniformemente em qualquer fechado e limitado contido em $B(0+i0,1)$ porque a série de termos positivos
$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n$$
converge para qualquer $r<1$...

Proposição 11.2 *Seja Ω contido em $\mathbb{C}$ e (f_n) uma sucessão de funções* **contínuas** *em Ω. Se (f_n) converge uniformemente para f, então f é contínua em Ω.*

Dem.(Esboço de...) Estudemos a continuidade de f em $z_0 \in \Omega$. Seja $\epsilon > 0$. Como a convergência é uniforme, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > N$,

$$\sup_{z\in\Omega}|f_n(z) - f(z)| < \epsilon/3$$

Então para certo $m > N$ tem-se

$$|f_m(z) - f(z)| < \epsilon/3$$

Como as f_n são contínuas, então existe $\delta > 0$ tal que

$$|f_m(z) - f_m(z_0)| > \epsilon/3 \text{ sempre que } |z - z_0| < \delta$$

Então, sempre que $|z - z_0| < \delta$,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_m(z) + f_m(z) - f_m(z_0) + f_m(z_0) - f(z_0)| \leq \\ &\leq |f(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(z_0)| + |f_m(z_0) - f(z_0)| < 3\epsilon/3 = \epsilon \end{aligned}$$

ou seja f é contínua em z_0. Como este é um ponto genérico de Ω, então f é contínua em Ω. ■

Corolário 11.1 *Seja (f_n) uma sucessão de funções contínuas definidas num domínio Ω contido em $\mathbb{C}$. Se a série*

$$\sum_{n=p}^{\infty} f_n$$

converge uniformemente em Ω, então

$$\sum_{n=p}^{\infty} f_n(z)$$

é uma função contínua de z em Ω.

■

Proposição 11.3 *Seja (f_n) uma sucessão de funções definidas em $\Omega \subset \mathbb{C}$ e contínuas sobre a curva $\gamma \subset \Omega$. Se (f_n) converge uniformemente em Ω para a função f então f é integrável sobre γ e*

$$\lim \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz$$

■

Corolário 11.2 *Seja (f_n) uma sucessão de funções definidas em $\Omega \subset \mathbb{C}$ e contínuas sobre $\gamma \subset \Omega$. Se a série*

$$\sum_{n=p}^{\infty} f_n$$

converge uniformemente em Ω, então $\sum_{n=p}^{\infty} f_n$ é integrável sobre γ e

$$\int_\gamma \sum_{n=p}^{\infty} f_n = \sum_{n=p}^{\infty} \int_\gamma f_n$$

■

Definição 11.3 (Série de potências) *Diz-se que*

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

é uma série de potências na variável z*, onde* z_0 *é um número complexo e* (a_n) *é uma sucessão de números complexos.*

Exemplo:

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Aqui $z_0 = 0$ e $a_n = \frac{1}{n!}$

Proposição 11.4 *Dada a série de potências*

$$\sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

existe $r \in [0, \infty]$ *tal que*

$$r = \overline{\lim_{n\ mapsto\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \left(= \lim_{n\mapsto\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \right)$$

tal que

1. $\sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge absolutamente em* $B(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$
2. $\sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge uniformemente em cada disco fechado e limitado centrado em* z_0 *isto é* $\overline{B(z_0, \rho)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$ *com* $0 < \rho < r$
3. *A série é divergente no exterior de* $B(z_0, r)$ *isto é diverge em*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$$

4. *Se* $r \neq 0$ *então a função*

$$S(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

é contínua para todo o $z \in B(z_0, r)$

■

Observções:

1. r é chamado *raio da série*
2. Este resultado não prevê o que se passa para z tal que $|z - z_0| = r$.
3. Se $r = 0$ então $S(z) = a_0$, enquanto que se $r = +\infty$, então $S(z)$ está definida para todo o $z \in \mathbb{C}$

Definição 11.4 (Função analítica) *A função* f *definida numa vizinhança de* z_0 *diz-se analítica em* z_0 *se existe* $r > 0$ *tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \text{em } B(z_0, r)$$

f *diz-se analítica num aberto* Ω *se for analítica em* z_0*, para todo o* $z_0 \in B(z_0, r)$

Exemplos

$$\sum_{n=p}^{\infty} z^n$$

Aqui, $a_n \equiv 1$ donde $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$. Então, a série converge absolutamente em $B(0,1) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Em particular, $\frac{1}{z-1}$ é analítica em $B(0,1)$.

Exemplo:

$$\sum_{n=p}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Aqui $z_0 = 0$ e $a_n = \frac{1}{n!}$ donde $\lim \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = +\infty$ e portanto a série converge absolutamente em $\mathbb{C}$ donde a função representada pela série $\sum_{n=p}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ é analítica em $\mathbb{C}$. Veremos que esta função é

$$e^z = \sum_{n=p}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{para todo o } z \in \mathbb{C}$$

Proposição 11.5 (Integração de série de potências) *Se a série de potências $\sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ tem raio de convergência $r > 0$ ela podde ser integrada termo a termo ao longo de qualquer curva regular γ contida em $B(z_0, r)$:*

$$\int_\gamma \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right] dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma (z-z_0)^n dz$$

■

Exemplos: Vimos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z_n \qquad \text{para todo o } z \in B(0,1)$$

$f(z) = \frac{1}{1-z}$ é contínua e primitivável em $B(0,1)$ sendo uma sua primitiva

$$F(z) = -Ln_{-\pi}(1-z)$$

holomorfa em

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x+iy : y = 0 \text{ e } x \geq 1\} \quad \text{e tambem em} \quad B(0,1) \subset \Omega$$

integrando a série termo a termo ao longo de qualquer curva que ligue $0 + i0$ a $z \in B(o,1)$ - o integral é independente do caminho -

$$-Ln_{-\pi} = \int_\gamma \frac{dz}{1-z} = \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma z^n dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} z^{n+1}$$

portanto

$$-Ln_{-\pi}(1-z) = Ln_{-\pi}\frac{1}{1-z} \qquad \text{é analítica em} \quad B(0,1)$$

Proposição 11.6 (Derivação de série de potências) *Seja a série de potências* $\sum_{n=p}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *com raio de convergência* $r > 0$ *e* $S(z)$ *a sua soma. Então:*

1. *A função* $S(z)$ *é holomorfa no disco de convergência absoluta* $B(z_0, r)$*;*
2. *A série pode ser derivada termo a termo no disco* $B(z_0, r)$*:*

$$S'(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(z-z_0)^n\right)' = \sum n = 1^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$$

A série das derivadas tem o mesmo raio de convergência absoluta isto é, r *e tambem converge uniformemente para* $S'(z)$ *em qualquer disco* $B(z_0, \rho)$ *com* $0 < \rho < r$*.*

■

Em particular, qualquer função analítica é holomorfa.

Exemplo: Já sabemos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{para } |z| < 1$$

donde

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = (-1)\frac{1}{(1-z)^2}(-1) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

e portanto para $|z| < 1$:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \left(\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (z^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n$$

... e com expoentes negativos?...

Proposição 11.7 *Dada a série de funções em* $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

existe $r > 0$ *tal que*

1. *asérie converge absolutamente no conjunto* $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| > r\}$
2. *asérie é uniformemente converge em cada conjunto* $\{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z-z_0| \leq r_2\}$ *com* $r < r_1 < r_2$
3. *a série diverge no conjunto* $\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\}$

Dem. (Esboço de...) Reescrever a série com $w = \frac{1}{z-z_0}$ e aplicar a Proposição 11.4. ■

Exemplo: Considere a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$$

e faça-se $w = \frac{1}{z}$. Como a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} w^n$$

tem raio $r = +\infty$ ent˜ ao a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$ converge para $z \neq 0$.

Séries de potências com expoentes positivos e negativos. A partir de agora usamos a designação de *série de potências* tambem quando os expoentes são negativos:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

Definição 11.5 *Dado um $z \in \Omega$, a série*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

diz-se convergente se ambas as séries

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$ *dita* parte principal
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ *dita* parte regular

forem convergentes.

Proposição 11.8 *Dada a série*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$$

existem r e R, $(0 \leq r < R \leq +\infty)$ tais que

1. *a série converge absolutamente na coroa circular*

$$C(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$$

2. *a série é uniformemente convergente em cada subconjunto fechado e limitado*

$$\overline{C(z_0, \rho_1, \rho_2)} = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z-z_0| \leq \rho_2\} \qquad \text{com } r < \rho_1 \leq \rho_2 < R$$

3. *a série diverge no exterior de $C(z_0, r, R)$ isto é, em*

$$\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r \text{ ou } |z-z_0| > R\}$$

Observação: *exterior de ...* significa *interior do complementar de ...*

11.1 Teorema de Taylor; funções analíticas

Com o Teorema de Teylor provamos que as funções holomorfas são analíticas provando então que para funções complexas de variável complexa, *holomorfia* e *analiticidade* são conceitos equivalentes.

Proposição 11.9 (Teorema de Taylor) *Sendo f holomorfa sobre $B(z_0, r)$, então f é analítica em $B(z_0, r)$ isto é,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \qquad \textit{dita } \text{série de Taylor em torno de } z_0$$

tendo-se ainda

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad \textit{dito } \text{coeficiente de Taylor de } f \text{ em torno de } z_0$$

■

Observação: se $z_0 = 0$, a série diz-se de McLaurin e os seus coeficientes a_n dizem-se coeficientes de McLaurin.

Exemplo: $f(z) = e^z$ é uma função inteira isto é, é holomorfa sobre $\mathbb{C}$. Então pelo Teorema de Taylor:

$$e^z = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{z_0}}{n!}(z - z_0)^n =$$

em particular, a sua série de McLaurin é

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z - z_0)^n \qquad \text{absoluta e uniformemente convergente para todo o } z \in \mathbb{C}$$

Funções trigonometricas:

$$(\cos z)' = -\sin z \qquad (-\sin z)' = -\cos z \qquad (-\cos z)' = \sin z \qquad (\sin z)' = \cos z$$

e

$$(\sin z)' = \cos z \qquad (\cos z)' = -\sin z \qquad (-\sin z)' = -\cos z \qquad (-\cos z)' = \sin z$$

e como $\cos 0 = 1$ e $\sin 0 = 0$ tem-se

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^n$$

e

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

Exercício: verificar a validade das séries acima.

Proposição 11.10 *Se f é holomorfa em $B(z_0, r)$, então o seu desenvolvimento de Taylor em torno de z_0 é único*

$\blacksquare$

Exemplo:

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \left(\text{para } |-z| < 1 \right) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

e como

$$\frac{|(-1)^n|}{|(-1)^{n+1}|} \underset{n \mapsto \infty}{\longrightarrow} 1$$

então a série é a série de McLaurin de $\frac{1}{1+z}$ e converge absoloutamente para a função em $B(0, 1)$.

Definição 11.6 *Seja f uma função anaítica em $z_0 \in \mathbb{C}$. Se*

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \qquad e \qquad f^k(z_0) \neq 0$$

então z_0 diz-se um zero de f de ordem k.

Proposição 11.11 *Seja f analítica em $B(z_0, r)$ e z_0 um zero de ordem k. Então*

$$f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z) \qquad \text{para todo o } z \in B(z_0, r)$$

sendo φ analítica em $B(z_0, r)$ e $\varphi(z_0) \neq 0$.

Dem. (Esboço de...) Aplicar o Teorema de Taylor. $\blacksquare$

Proposição 11.12 *Seja f analítica em Ω e não idênticamente nula em Ω. Se $z_0 \in \Omega$ é zero de f então existe $B(z_0, r)$ onde $f(z) \neq 0$ para $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$.*

■

Corolário 11.3 *Seja f analítica em Ω e não idênticamente nula em Ω. Seja $A \subset \Omega$ fechado e limitado. Então A só contem um número finito de zeros da função f.*

■

Exemplo:

Seja f uma função inteira tal que

$$f(x+i0) = e^x \qquad \text{para todo o } x \in \mathbb{R}$$

ou seja f é o prolongamento analítico da exponencial real para o plano complexo, $\mathbb{C}$.

Seja

$$\varphi(z) = f(z) - e^z \qquad \text{para todo o } z \in \mathbb{C}$$

Enão, f é analítica em $\mathbb{C}$ e

$$\varphi(x+i0) = f(x+i0) - e^{x+i0} = 0 \qquad \text{para todo o } x \in \mathbb{R}$$

Então, φ tem inifinitos zeros donde $\varphi \equiv 0$. Portanto $f(z) = e^z$ é a única função que prolonga analiticamente a exponencial real a $\mathbb{C}$.

12 Singularidades; Teorema de Laurent

Definição 12.1 *Seja f uma função complexa definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Diz-se que f tem uma* **singularidade** *em $z_0 \in \mathbb{C}$, ou que z_0 é um* **ponto singular** *se f está definida numa vizinhança de z_0 e não é analítica em z_0.*

Diz-se que f tem uma **singularidade isolada** *em z_0 ou que z_0 é um* **ponto singular isolado** *de f, quando f é analítica numa vizinhança de z_0 mas não em z_0 - isto é uma viznhança perfurada de z_0:*

$$D^*(z_0, \epsilon) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$$

Exemplos

1. $f(z) = \frac{1}{z}$ só não é analítica em $z_0 = 0$. 0 é uma singularidade isolada de f.
2. $g(z) = Ln(z)$ é analítica excepto em $\{x + iy \,:\, x \leq 0 \quad y = 0\}$. Qualquer ponto deste conjunto é uma singularidade não isolada de g
3. $h(z) = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$

Definição 12.2 *Seja z_0 um ponto singular isolado de uma função $f(z)$.*

1. *Se $\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z) = l \in \mathbb{C}$, z_0 diz-se uma* **singularidade removível** *de f*
2. *Se $\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z) = \infty$, z_0 diz-se uma* **polo** *de f*
3. *Se não existe $\lim\limits_{z \mapsto z_0} f(z)$ isto é, se z_0 não é uma singularidade removível nem um polo de f, então z_0 diz-se uma* **singularidade essencial** *de f*

Exemplos

1. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z} \underset{z \mapsto 0}{\longrightarrow} 1$ singularidade removível
2. $g(z) = \frac{1}{z} \underset{z \mapsto 0}{\longrightarrow} \infty$ polo
3. $h(z) = e^{1/z}$ singularidade essencial (a exponencial complexa é periódica)

12.1 Singularidades removíveis

Proposição 12.1 *Seja f uma função complexa, contínua num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ e analítica em Ω com a possível excepção de z_0. Então, f tambem é analítica em z_0.*

$\blacksquare$

Notar que em $\mathbb{R}$ este resultado não é verdadeiro.

Proposição 12.2 (Teorema de Riemann) *Seja f uma função analítica e limitada em $D^*(z_0, r)$. Então z_0 é uma singularidade removível para f.*

$\blacksquare$

12.2 Polos

Definição 12.3 *Seja z_0 um polo de uma função complexa f. Diz-se que z_0 tem* ordem k *se*

$$\lim_{z \mapsto z_0} (z - z_0)^k f(z) = L \qquad L \notin \{0, \infty\}$$

Se $k = 1$ diz-se que o polo é simples.

Observção:
Se z_0 é um polo de ordem k para f, então

1. $\lim\limits_{z \mapsto z_0} (z - z_0)^n f(z) = \infty$ se $n < k$ e $\lim\limits_{z \mapsto z_0} (z - z_0)^n f(z) = 0$ se $n > k$
2. Atendendo a que $\lim\limits_{z \mapsto z_0} (z - z_0)^k f(z)$ tem um valor finito, $(z - z_0)^n f(z)$ é uma função limitada numa vizinhança de z_0

Proposição 12.3 *Seja z_0 o polo de uma função complexa f. Então, z_0 é uma singularidade removível de*

$$g(z) = \frac{1}{f(z)}$$

que tem portanto uma extensão analítica a z_0.

$\blacksquare$

Definição 12.4 *Uma função analítica num domínio Ω, excepto em polos, diz-se uma função* meromorfa *em Ω.*

Exemplo

$$f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$$

é analítica em

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : z = n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$$

Os pontos $z = n\pi$ são polos simples de f pois

$$\lim_{z \mapsto n\pi} \frac{1}{\sin(z)} = \infty$$

e

$$\lim_{z \mapsto n\pi} (z - n\pi) \frac{1}{\sin(z)} = (-1)^n$$

Então f é meromorfa em $\mathbb{C}$.

12.3 Singularidades essenciais

Proposição 12.4 (Teorema de Casoratti-Weierstrass) *Se z_0 é uma singularidade essencial de uma função f, então, quaisquer que sejam $L \in \mathbb{C}$ e ϵ, em qualquer vizinhança de z_0 existe um ponto z tal que $|f(z) - L| < \epsilon$ isto é, numa vizinhança de z_0, f está arbitrariamente próxima de qualquer número complexo.*

■

Proposição 12.5 (Teorema de Picard) *Na vizinhança de uma singularidade essencial, uma função f assume todos os valores de $\mathbb{C}$ com a possível excepção de um único, um número infinito de vezes.*

■

12.4 Teorema de Laurent

Proposição 12.6 (Teorema de Laurent) *Seja $f(z)$ uma função analítica na coroa circular*

$$C(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < r < |z - z_0| < R\}$$

Então

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad z \in C(z_0, r, R)$$

sendo a convergência da série absoluta em $C(z_0, r, R)$ e uniforme em cada coroa fechada $\{z \in \mathbb{C} : r < \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2 < R\}$. Os coeficientes da série são dados pelas fórmulas

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \qquad \text{onde } r < \rho < R$$

■

Os coeficientes c_n são os coeficientes de Laurent da série. Para n negativo, os c_n são os coeficientes de Laurent da parte principal. Para n não negativo os c_n são os coeficientes de Laurent da parte regular.

1. $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$. A função é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0\} = C(0, 0, \infty)$. O teorema de Laurent afirma que f admite um desenvolvimento da forma $\sum_{n-\infty}^{\infty} a_n z^n$. Tem-se

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{donde } e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{e portanto } \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}$$

2. $g(z) = \frac{1}{z^3(1+z)}$. Esta função é analítica em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$. É então possível definir uma coroa circular, $C(0, 0, 1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ onde f é analítica e o Teorema de Laurent pode ser aplicado. Já sabemos que

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

donde

$$\frac{1}{z^3(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n-3} = \sum_{n=-3}^{\infty} (-1)^{n+3} z^n \qquad \text{com } z \in D^*(0, 1)$$

Então, a parte principal da série só tem três coeficientes não nulos: a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}

3. $h(z) = e^{1/z}$. Como $e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$, então

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \qquad \text{com } z \in C(0, 0, \infty)$$

A parte regular desta série só tem o termo a_0 não nulo, enquanto que os infinitos termos da parte principal s ao todos não nulos

Proposição 12.7 (Unicidade do desenvolvimento de Laurent) *Seja $f(z)$ uma função analítica na coroa circular $C(z_0, r, R)$ e tal que, para qualquer z em $C(z_0, r, R)$, $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ é uniformemente convergente em qualquer coroa fechada $\{z \in \mathbb{C} : r < \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2 < R\}$. Então os a_n são os coeficientes de Laurent de f no ponto z_0 isto é, a série dada é a série de Laurent de f em $C(z_0, r, R)$.*

■

Exemplo:

Note-se que a série de Laurent é única uma vez que se fixe a coroa circular. Como vamos ver de seguida:

Considere-se

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$

O ponto $z_0 = 1$ é uma singularidade isolada para f. É possível obter dois desenvolvimentos em série de potências de $(z-1)$:

Em $C(1, 0, 1)$:

$$\frac{1}{z-1}\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-(-(z-1))} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n = \sum_{n=0}^{infty}(-1)^n(z-1)^{n-1}$$

E em $C(1, 1, +\infty)$:

$$\frac{1}{z-1}\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{\frac{1}{z-1}+1} = \frac{1}{(z-1)^2}\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{z-1}\right)} = \frac{1}{(z-1)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+2}}$$

Proposição 12.8 *Sejam $f(z)$ uma função analítica na coroa circular $C(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ e $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ a sua série de Laurent nessa coroa. Então*

1. *Se $a_n = 0$ para $n < 0$, z_0 é uma singularidade removível para f e reciprocamente se z_0 é uma singularidade removível para f, a respectiva série de Laurent em $C(z_0, r, R)$ é*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

2. *Se apenas um número finito de coeficientes da parte principal da série é diferente de zero isto é, se existe k tal que $a_n = 0$ para $n < -k$ e $a_{-k} \neq 0$, z_0 é um polo de f. Reciprocamente, se f tem um polo de ordem k em z_0, a respectiva série de Laurent em $C(z_0, r, R)$ é*

$$\sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

3. *Se um número infinito de coeficientes da parte principal da série é diferente de zero, então z_0 é uma singularidade essencial. Reciprocamente, se z_0 é uma singularidade eesencial de f, a respectiva série de Laurent em $C(z_0, r, R)$ tem uma infinidade de termos não nulos na parte principal. A respectiva série de Laurent em $C(z_0, r, R)$ é*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

13 Resíduos

noindent

13.1 Teorema dos Resíduos

Seja f uma função analítica num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ excepto num número finito de singularidades isoladas que ocorrem nos pontos z_j com $j = 1, 2, \ldots, n$ e seja γ uma curva regular fechada contida em Ω e contendo os pontos z_j no seu interior. Todas as curvas estão orientadas no sentido directo (ou anti-horário). Qual será o valor de

$$\int_\gamma f(z)dz \qquad ?$$

Comecemos por notar que, graças ao Teorema de Cauchy para domínios multiplamente conexos (Proposição 9.5), o integral ao longo de γ é igual à soma de integrais sobre circunferências centradas nas singularidades, um integral por singularidade. Mais concretamente, escolhendo o mesmo raio, $r > 0$, para todas as circunferências e de modo a que os discos delimitados pelas circunferências não se intersectem e que estejam contidos no interior da curva γ (ver Figura 19), temos:

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f$$

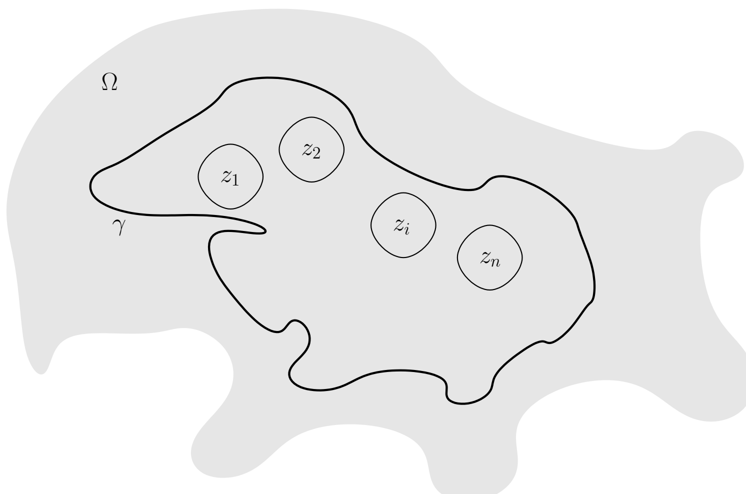


Figure 19: Domínio Ω com curva γ e singularidades z_j

Consideremos a circunferência C_j. Como f é analítica sobre a vizinhança perfurada delimitada por C_j, $B^*(z_j, r)$, e esta vizinhança perfurada é uma coroa circular

$$B^*(z_j, r) = C(z_j, 0, r)$$

então o Teorema de Laurent afirma que existe um desenvolvimento de Laurent único de f nessa coroa circular em torno de z_j, $C(z_j, 0, r)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^j (z - z_j)^n \qquad \text{para todo o } z \in C(z_j, 0, r)$$

onde o índice superior j em c_n^j ilustra a sua dependência na coroa $C(z_j, 0, r)$ em torno da qual estamos a fazer o desenvolvimento em série de f. Em particular, diferentes coroas, diferentes desenvolvimentos, **ainda que a função f seja a mesma**.

Consideremos, agora, o integral de f sobre a circunferência C_j, $\int_{C_j} f$.

Em cada conjunto fechado e limitado contido na coroa $C(z_j, 0, r)$, a série de Laurent $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^j (z-z_j)^k$ converge uniformemente donde

$$\int_{C_j} f = \int_{C_j} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^j (z - z_j)^k \right] dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^j \int_{C_j} (z - z_j)^k dz$$

e $\int_{C_j} (z - z_j)^k dz$ vai depender de k, nomeadamente:

1. Se $k \geq 0$ então $(z - z_j)^k$ é uma função holomorfa no disco delimitado por C_j e portanto o respectivo integral é 0 pelo Teorema de Cauchy (Proposição 9.1)
2. Se $k = -1$

$$\int_{C_j} (z - z_j)^k dz = \int_{C_j} (z - z_j)^{-1} dz = 2\pi i \qquad \text{... cálculo feito já bastante vezes nas aulas ...}$$

3. Se $k < -1$ então $-k > 1$ e

$$\int_{C_j} (z - z_j)^k dz = \int_{C_j} \frac{1}{(z - z_j)^{-k}} dz = 0 \frac{2\pi i}{(-k)!} = 0$$

pela fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem $-k(> 1)$ (Proposição 10.3) aplicada à função constante $g \equiv 1$

Conclui-se, portanto, que, **para qualquer singularidade** z_j da função f

$$\int_{C_j} (z - z_j)^k dz = \begin{cases} 2\pi i, & k = -1 \\ 0, & k \neq -1 \end{cases}$$

donde

$$\int_{C_j} f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^j \int_{C_j} (z - z_j)^k dz = \ldots c_{-3}^j \cdot 0 + c_{-2}^j \cdot 0 + c_{-1}^j \cdot 2\pi i + c_0^j \cdot 0 + c_1^j \cdot 0 + \cdots = 2\pi i c_{-1}^j$$

Então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} c_{-1}^j$$

Provámos assim que

Proposição 13.1 (Teorema dos resíduos) *Seja f uma função analítica num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ excepto num número finito de singularidades isoladas que ocorrem nos pontos z_j com $j = 1, 2, \ldots, n$ e seja γ uma curva regular fechada contida em Ω e contendo os pontos z_j no seu interior. Todas as curvas estão orientadas no sentido directo (ou anti-horário). Então*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} c_{-1}^j$$

Desta forma, os coeficientes c_{-1} da série de Laurent de uma função f na coroa circular $C(z_0, 0, r)$ onde z_0 é uma singularidade isolada de f, ganham uma nova importância. Eles são conhecidos como os resíduos de f em z_0:

Definição 13.1 *Chama-se* **resíduo** *de uma função f na singularidade isolada z_0, ao coeficiente c_{-1} do desenvolvimento de Laurent de f no ponto z_0 em $C(z_0, 0, r)$, e escreve-se*

$$res(f, z_0) = c_{-1}$$

Note-se que, graças ao Teorema de Laurent (Proposição 12.8) se tem

$$res(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_C f$$

onde C é uma pequena circunferência centrada em z_0.

13.2 Definição de resíduos

Como vimos atrás, o Teorema de Laurent afirma que se uma função f é analítica numa coroa circular

$$C(z_0, 0, r) = \{z \in \mathbb{C} \;\; 0 < |z - z_0| < r\}$$

então f admite um desenvolvimento em série de Laurent no ponto z_0

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \qquad \text{com} \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

em que C é uma circunferência de centro z_0 e raio ρ tal que $0 < \rho < r$.

Definição 13.2 *Chama-se* **resíduo** *de uma função f na singularidade isolada z_0, ao coeficiente c_{-1} do desenvolvimento de Laurent de f no ponto z_0 em $C(z_0, 0, r)$, e escreve-se*

$$res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz$$

Seguidamente vamos ver exemplos de cálculo de resíduos nos diferentes tipos de singularidade: singularidade removível, polo, e singularidade essencial.

13.2.1 z_0 é uma singularidade removível

Neste caso, pela definição de singularidade removível, existe

$$\lim_{z \mapsto z_0} f(z) = L \in \mathbb{C}$$

e a respectiva série de Laurent de f no ponto z_0 em $C(z_0, 0, r)$ tem os coeficientes da parte principal todos nulos (cf. 12.8), isto é

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots \qquad \text{em} \qquad C(z_0, 0, r)$$

Então, $c_{-1} = res(f, z_0) = 0$

13.2.2 z_0 é um polo de ordem k, com $k \in \mathbb{N}$

Neste caso a parte principal da série de Laurent de f no ponto z_0 em $C(z_0, 0, r)$ tem um número finito de termos não nulos (cf. 12.8). Tem-se assim

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{c_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

Multiplicando ambos os membros da igualdade anterior por $(z - z_0)^k$, obtem-se

$$(z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + c_0(z - z_0)^k + c_1(z - z_0)^{k+1} + \ldots$$

A série que figura no segundo membro da igualdade é uma série de potências positivas de $(z - z_0)$, pelo que pode ser derivada termo a termo um número qualquer de vezes. Então, derivando $(k - 1)$ vezes, obtem-se

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big[(z - z_0)^k f(z) \Big] = (k - 1)! c_{-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big[c_n (z - z_0)^{k+n} \Big]$$

Como os termos da série correspondentes a $n \geq 0$ contêm o factor $(z - z_0)$, tem-se

$$\lim_{z \mapsto z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big[(z - z_0)^k f(z) \Big] = (k - 1)! c_{-1}$$

isto é,

$$c_{-1} = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \mapsto z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \Big[(z - z_0)^k f(z) \Big]$$

Exemplos:
Seja

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)^2}$$

então f tem um polo simples em $z_0 = 1$ e um polo duplo em $z_0 = -1$. Então, para o polo simples, $z_0 = 1$,fazendo $k = 1$ na expressão acima:

$$res(f,1) = \lim_{z\mapsto 1}\left[(z-1)\left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right)\right] = \frac{1}{4}$$

e para o polo duplo, $z_0 = -1$, fazendo $k = 2$ na expressão acima

$$res(f,-1) = \lim_{z\mapsto -1}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2\left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2}\right)\right] = -\frac{1}{4}$$

13.2.3 z_0 é uma singularidade essencial de f

Como neste caso a parte principal da série de Laurent de f no ponto z_0 tem uma infinidade de termos não nulos, o cálculo do resíduo de f no ponto z_0 faz-se recorrendo à própria série.

Exemplo:
A função f definida em $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ por $f(z) = e^{-2/z}$ tem uma singularidade essencial em $z = 0$. Tem-se:

$$e^{-2/z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-2/z)^n = 1 + \left(-\frac{2}{z}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{2}{z}\right)^2 + \ldots$$

e portanto

$$res(f,0) = -2$$

13.3 Integrais Impróprios

Uma das aplicações do Teroema dos Resíduos (Proposição 13.1) é no cálculo dos integrais impróprios de funções **reais**. De seguida apresentamos uma breve introdução a este tema, restringindo-nos unicamente àquilo que nos interessa aqui: as aplicações do Teorema dos Resíduos.

Integrais impróprios são aqueles em que se realiza a integração de uma função (integrável) sobre um intervalo não limitado, como por exemplo

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

ou quando o intervalo de integração é limitado mas a função integranda não é limitada, como por exemplo

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

ou finalmente quando nem o intervalo de integração é limitado nem a função integranda é limitada.

De acordo com o que dissémos acima, só nos vamos interessar pelos integrais sobre intervalos de comprimento infinito, mas sendo a função integranda integrável em qualquer subintervalo de comprimento finito do intervalo de integração.

13.3.1 Integrais Impróprios: Intervalo de integração não é limitado

Definição 13.3

Seja f uma função definida em $[a, \infty[$ e integrável em todo o intervalo $[a, x]$ qualquer que seja o $x > a$. Se existe

$$\lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x f(t)dt$$

definimos

$$\int_a^\infty f(t)dt \overset{def.}{=} \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x f(t)dt$$

dizendo, então, que $\int_a^\infty f(t)dt$ é um integral impróprio convergente.

Exemplo 13.1

a) $\int_1^\infty \frac{1}{t}dt$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t}dt = \lim_{x \mapsto \infty} \int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x \mapsto \infty} \Big[\log(t)\Big]_1^x = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(\log(x) - \log(1)\Big) = \lim_{x \mapsto \infty} \log(x) = \infty$$

Então $\int_1^\infty \frac{1}{t}dt$ diverge.

b) $\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt$

$$\int_1^\infty \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x \mapsto \infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}dt = \lim_{x \mapsto \infty} \Big[-\frac{1}{t}\Big]_1^x = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(-\frac{1}{x} - (-\frac{1}{1})\Big) = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(-\frac{1}{x} + 1\Big) = 1$$

Então $\int_1^\infty \frac{1}{t}dt$ converge.

Graficamente:

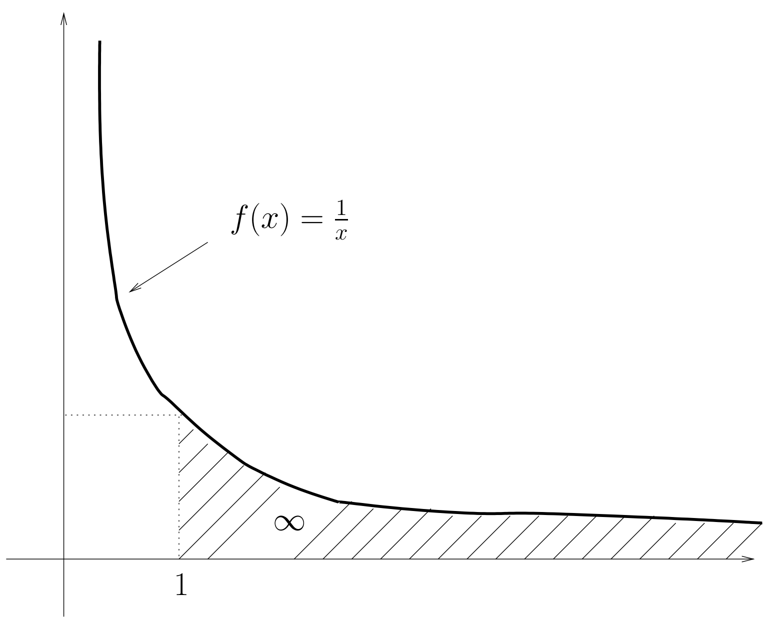


Figure 20: Área infinita

Se f é integrável em qualquer subintervalo fechado e limitado de $]-\infty, a]$ (como por exemplo, qualquer função contínua em $\mathbb{R}$) faz sentido considerar

$$\lim_{x \mapsto -\infty} \int_x^a f(t)dt$$

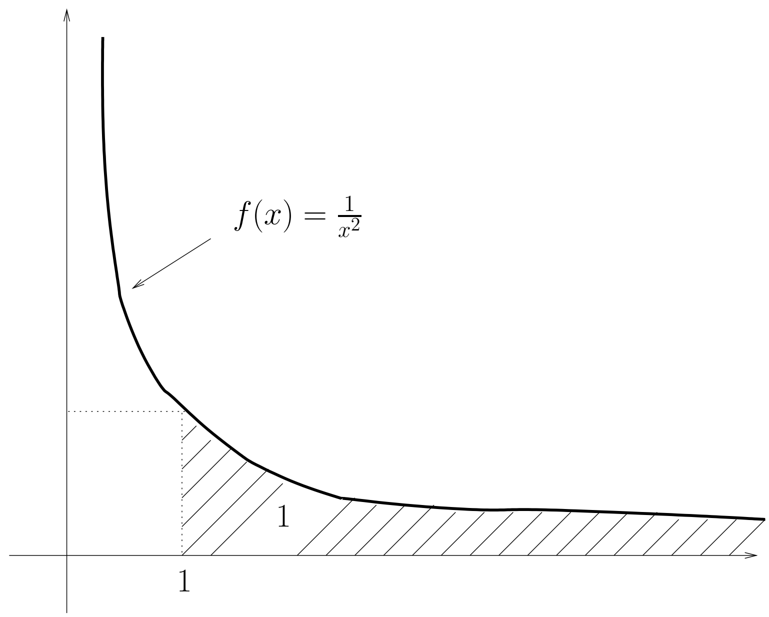


Figure 21: Área finita

Caso este limite exista definimos

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt \stackrel{def.}{=} \lim_{x \mapsto -\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt$$

dizendo-se então que este integral impróprio é convergente. De notar que o estudo da natureza destes integrais (isto é, se são ou não convergentes) se reduz ao estudo da natureza de integrais do tipo $\int_a^\infty g(t)dt$ já que

$$\int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \lim_{x \mapsto -\infty} \int_{x}^{a} f(t)dt = (u = -t, \dots) \lim_{x \mapsto -\infty} \int_{-x}^{-a} f(-u)\big(-du\big) = \lim_{x \mapsto -\infty} \int_{-a}^{-x} f(-u)du =$$
$$= \lim_{x \mapsto \infty} \int_{-a}^{x} f(-u)du$$

Por outro lado se

$$\int_{0}^{\infty} f(t)dt \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{0} f(t)dt$$

forem convergentes, diremos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

é convergente.

Proposição 13.2 *Seja f definida em $[a, \infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x > a$. Seja λ uma constante real não nula. Então, os integrais,*

$$\int_{a}^{\infty} f \quad e \quad \int_{a}^{\infty} \lambda f$$

convergem ambos ou divergem ambos - isto é, têm ambos a mesma natureza. Em caso de convergência, tem-se ainda,

$$\int_{a}^{\infty} \lambda f = \lambda \int_{a}^{\infty} f$$

Dem. Notando que, caso um dos seguintes limites exista, se tem,

$$\lambda \cdot \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x f = \lim_{x \mapsto \infty} \Big(\lambda \cdot \int_a^x f \Big) = \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x \big(\lambda \cdot f \big)$$

o que implica que qualquer um dos outros limites tambem tem que existir, então a convergência de um integral implica a convergência do outro integral. Por outro lado, se um dos integrais diverge então o outro integral tambem tem que divergir. De facto como acabámos de ver, se um dos integrais converge então um dos limites acima existe o que implica que os outros limites tambem existam. ■

Proposição 13.3 *Sejam f e g definidas em $[a, \infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x > a$. Se*

$$\int_a^\infty f \quad e \quad \int_a^\infty g$$

convergem, então,

$$\int_a^\infty \big(f + g \big)$$

tambem converge e tem-se

$$\int_a^\infty \big(f + g \big) = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g$$

Dem. Tem-se,

$$\lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x \big(f + g \big) = \lim_{x \mapsto \infty} \left(\int_a^x f + \int_a^x g \right) = \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x f + \lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x g = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g$$

ou seja, existe o limite

$$\lim_{x \mapsto \infty} \int_a^x \big(f + g \big)$$

o que quer dizer, por definição, que o integral impróprio da integranda $f + g$ converge tendo-se ainda

$$\int_a^\infty \big(f + g \big) = \int_a^\infty f + \int_a^\infty g$$

■

Observação 13.1

Se $\int_a^\infty f$ e $\int_a^\infty g$ **não** convergem então a natureza do integral impróprio da soma $f + g$ tanto pode ser convergente como divergente:

Exercício 13.1

Qual a natureza de $\int_1^\infty \big(f + g \big)$ quando

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{x} = g(x) \qquad\qquad b) \quad f(x) = \frac{1}{x} = -g(x) \quad ?$$

Proposição 13.4 *Seja f definida em $[a, \infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x > a$. Então, para $c > a$,*

$$\int_a^\infty f \quad e \quad \int_c^\infty f$$

têm a mesma natureza e, em caso de convergência,

$$\int_a^\infty f = \int_a^c f + \int_c^\infty f$$

Dem. Analogamente à s demonstrações anteriores, notando que

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x f = \lim_{x\mapsto\infty}\Big(\int_a^c f + \int_c^x f\Big) = \int_a^c f + \lim_{x\mapsto\infty}\int_c^x f$$

em que, na última igualdade, $\int_a^c f$ "passa para fora do limite", já que não depende de x (que é a variável sobre a qual se está a calcular o limite). ■

Exemplo 13.2

Seja

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\sqrt{\tan(e^x)}}, & 0 < x < 10^{100} \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 10^{100} \end{cases}$$

Então, $\int_0^\infty f$ é convergente porque

$$\int_{10^{100}}^\infty \frac{1}{t^2}dt$$

é convergente (como vimos atrás).

O estudo dos integrais impróprios tem algumas semelhanças com o estudo das séries. Em particular, dado um integral impróprio, pretendemos ser capazes de saber se ele converge ou não (muitas vezes mais do que saber o valor desse integral - em caso de convergência). Para isso, vamos ter, por um lado, uma colecção de funções cuja natureza dos respectivos integrais impróprios vai ser conhecida e por outro lado, vamos ter resultados que nos permitem relacionar a natureza de dois integrais impróprios. Assim, quando quisermos analisar a natureza de um novo integral impróprio, tentamos relacioná-lo com outros de natureza já conhecida através de resultados como o seguinte:

Teorema 13.1 (Critério de majoração) *Sejam f e g positivas e definidas em $[a,\infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a,x]$ com $x > a$. Seja ainda $f(x) \leq g(x)$ para todo o $x > a$.*

$$\text{Se } \int_a^\infty g \quad \text{converge, então} \quad \int_a^\infty f \quad \text{tambem converge.}$$

$$\text{Se } \int_a^\infty f \quad \text{diverge, então} \quad \int_a^\infty g \quad \text{tambem diverge.}$$

Dem. Começamos por observar que

$$F(x) = \int_a^x f$$

é crescente já que $f > 0$. Assim, o limite

$$\lim_{x\mapsto\infty} F(x) = \int_a^\infty f$$

existe **em** $\overline{\mathbb{R}}$, podendo portanto ser infinito. Seguidamente mostramos que se $\int_a^\infty g$ converge, então a função F é majorada e que portanto o referido limite é finito, ou seja, a convergência de $\int_a^\infty g$ implica a convergência de $\int_a^\infty f$. De facto, como $f(t) \leq g(t)$ para todo o $t \geq a$, então $\int_a^x f \leq \int_a^x g$, donde,

$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x f \leq \lim_{x\mapsto\infty}\int_a^x g < \infty$$

A segunda afirmação do teorema é o contrarecíproco da afirmação que acabámos de provar. ■

Exemplo 13.3

Qual a natureza de

$$\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^4} \quad ?$$

Comecemos por

Exemplo 13.4

Qual a natureza de
$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$
(em que α é um parâmetro real)? Separemos o caso $\alpha = 1$:
$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t}dt = \lim_{x\mapsto\infty}\Big[\log(t)\Big]_1^x = \lim_{x\mapsto\infty}\log\Big(\frac{x}{1}\Big) = \infty$$
donde $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ com $\alpha = 1$ é divergente. Analisemos agora para $\alpha \neq 1$:
$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \lim_{x\mapsto\infty}\Big[\frac{1}{-\alpha+1}t^{-\alpha+1}\Big]_1^x = \lim_{x\mapsto\infty}\frac{1}{-\alpha+1}\big(x^{-\alpha+1}-1\big)$$
donde
$$\lim_{x\mapsto\infty}\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{para } \alpha > 1 \\ \infty & \text{para } \alpha < 1 \end{cases}$$
Assim,
$$\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt = \begin{cases} \text{converge para} & \alpha > 1 \\ \text{diverge para} & \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Então para se averiguar a natureza de $\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^4}$ notamos que
$$\frac{1}{1+t^4} \leq \frac{1}{t^4}$$
e que $\frac{1}{t^4}$ é integranda de um integral impróprio convergente - $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ com $\alpha = 4 > 1$. Pelo critério de majoração $\int_1^\infty \frac{dt}{1+t^4}$ é convergente.

Corolário 13.1 *Sejam f e g positivas e definidas em $[a, \infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x > a$. Suponha-se ainda que $g(x) > 0$ para todo o $x > a$ e que existem constantes positivas c_1 e c_2, tais que*
$$c_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq c_2 \qquad \textit{para todo o } x > a$$
Então,
$$\int_a^\infty f \quad e \quad \int_a^\infty g$$
têm a mesma natureza.

Dem.
$$c_1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq c_2 \qquad \text{para todo o } x > a$$
é equivalente a
$$c_1 g(x) \leq f(x) \leq c_2 g(x) \qquad \text{para todo o } x > a$$
Se $\int_a^\infty f$ converge então, pelo critério de majoração $\int_a^\infty c_1 g$ tambem converge donde $\big(c_1\big)^{-1}\int_a^\infty c_1 g = \int_a^\infty g$ tambem converge. Reciprocamente, se $\int_a^\infty g$ converge então $\int_a^\infty c_2 g$ tambem converge e pelo critério de majaoração $\int_a^\infty f$ converge. Analogamente para integrais divergentes. ■

Corolário 13.2 (Critério do limite) *Sejam f e g positivas e definidas em $[a, \infty[$ e integráveis em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x > a$. Suponha-se ainda que $g(x) > 0$ para todo o $x > a$ e que existe, em $\overline{\mathbb{R}}$,*
$$l = \lim_{x\mapsto\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\text{Se} \qquad l>0 \qquad \text{então} \qquad \int_a^\infty f \quad \text{e} \quad \int_a^\infty g \ \text{têm a mesma natureza} \tag{1}$$

$$\text{Se} \qquad l=0 \qquad \text{então} \qquad \left[\int_a^\infty g \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^\infty f \ \text{converge}\right] \tag{2}$$

$$\text{Se} \qquad l=\infty \qquad \text{então} \qquad \left[\int_a^\infty f \quad \text{converge} \quad \Longrightarrow \quad \int_a^\infty g \ \text{converge}\right] \tag{3}$$

(Notar a importância dos contrarecíprocos de (2) e (3))

Dem. $l = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ é equivalente a dizer, por definição de limite, que

$$\text{Para todo o } \epsilon > 0 \text{ existe pelo menos um } \delta > 0 \text{ tal que, sempre que } x > \frac{1}{\delta} \text{ então } \left|\frac{f(x)}{g(x)} - l\right| < \epsilon$$

e desembaraçando de módulos e reescrevendo esta última expressão

$$\text{Para todo o } \epsilon > 0 \text{ existe pelo menos um } \delta > 0 \text{ tal que, sempre que } x > \frac{1}{\delta} \text{ então } l-\epsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l+\epsilon$$

Caso (1): $l>0$. Tomando $\epsilon = \frac{l}{2}\big(>0\big)$, há-de existir um $\delta > 0$ tal que

$$\text{com} \quad x > \delta \quad \text{se tenha } \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3l}{2}$$

Então, estamos nas condições do Corolário anterior com $c_1 = \frac{l}{2}$ e $c_2 = \frac{3l}{2}$. Segue-se que os integrais impróprios em questão têm a mesma natureza.

Caso (2): $l=0$. Tomando $\epsilon = 1\big(>0\big)$, há-de existir $\delta > 0$ tal que

$$\text{com} \quad x > \delta \quad \text{se tenha } -1 < \frac{f(x)}{g(x)} < 1$$

Como as funções são positivas então a segunda desigualdade acima pode-se reescrever na forma

$$f(x) \leq g(x)$$

Então pelo critério de majoração, se $\int_a^\infty g$ converge, então $\int_a^\infty f$ tambem converge.

Caso (3): $l=\infty$ - fica como exercício. ■

Exemplo 13.5

Qual a natureza de

$$a) \quad \int_1^\infty \frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}dx \quad ?$$

Considerando a função integranda, que é uma função racional em x, notamos que para x "muito grande" o comportamento do polinómio no numerador é "dado" por x^2, enquanto que o do polinómio no denominador é "dado" por x^3. Como

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}}{\frac{x^2}{x^3}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x^2}}{\frac{3x^3+5x+1}{x^3}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{1+\frac{3}{x^2}}{3+5\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1+0}{3+0+0} = \frac{1}{3} > 0$$

então, pelo critério do limite, os integrais impróprios

$$\int_1^\infty \frac{x^2+3}{3x^3+5x+1}dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x}dx$$

têm a mesma natureza (notar que $\frac{1}{x} = \frac{x^2}{x^3}$). Como $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ é integral impróprio divergente (ver exemplo 13.3.1), então o integral impróprio em estudo tambem é divergente.

$$b) \quad \int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^3}dx \quad ?$$

Comparemos a integranda $\frac{\log(x)}{x^3}$ com $\frac{1}{x^3}$ para subsequentemente tentarmos aplicar o critério do limite:

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{\log(x)}{x^3}}{\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\mapsto\infty} \log(x) = \infty$$

o que não nos dá, neste caso em particular, nenhuma indicação sobre a natureza do integral em estudo. Comparemos então a integranda em causa com $\frac{1}{x^2}$:

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{\frac{\log(x)}{x^3}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$$

(use Cauchy...) e então pelo critério do limite, o integral impróprio em questão é convergente.

$$c) \quad \int_1^\infty e^{-x^2}dx \quad ?$$

Para resolver este exemplo, comecemos por estabelecer a natureza de mais uma colecção de integrais impróprios.

Exemplo 13.6

Qual a natureza de

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\alpha t}}$$

(em que α é um parâmetro real)? O caso $\alpha = 0$ corresponde a um integral divergente (exercício). Passemos ao caso $\alpha \neq 0$. Tem-se,

$$\lim_{x\mapsto\infty} \int_0^x \frac{dt}{e^{\alpha t}} = \lim_{x\mapsto\infty} \int_0^x e^{-\alpha t}dt = \lim_{x\mapsto\infty} \left[\frac{1}{-\alpha} e^{-\alpha t}\right]_0^x = -\frac{1}{\alpha} \lim_{x\mapsto\infty} \left[e^{-\alpha x} - 1\right]$$

donde

$$\lim_{x\mapsto\infty} \int_0^x \frac{dt}{e^{\alpha t}}dt = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}, & \text{para } \alpha > 0 \\ \infty & \text{para } \alpha < 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\alpha t}} \quad \begin{cases} \text{converge para } \alpha > 0 \\ \text{diverge para } \alpha \leq 0 \end{cases}$$

Voltemos então à questão da convergência de

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

Como

$$\lim_{x\mapsto\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{e^x}} = \lim_{x\mapsto\infty} \frac{1}{e^{x^2-x}} = 0$$

então, porque $\int_0^\infty \frac{dt}{e^t}$ é convergente (corresponde ao caso $\alpha = 1$ no exemplo acima), pelo critério do limite, $\int_1^\infty e^{-x^2}dx$ tambem é convergente.

Teorema 13.2 *Seja f definida em $[a, \infty[$ e integrável em qualquer intervalo $[a, x]$ com $x > a$.*

$$\text{Se } \int_a^\infty |f| \text{ converge então } \int_a^\infty f \text{ tambem converge}$$

Dem. Sejam f^+ e f^- as funções definidas por

$$f^+ = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} (\geq 0), \qquad \text{Parte Positiva de } f$$

$$f^- = \frac{|f(x)| - f(x)}{2} (\geq 0), \qquad \text{Parte Negativa de } f$$

Temos então

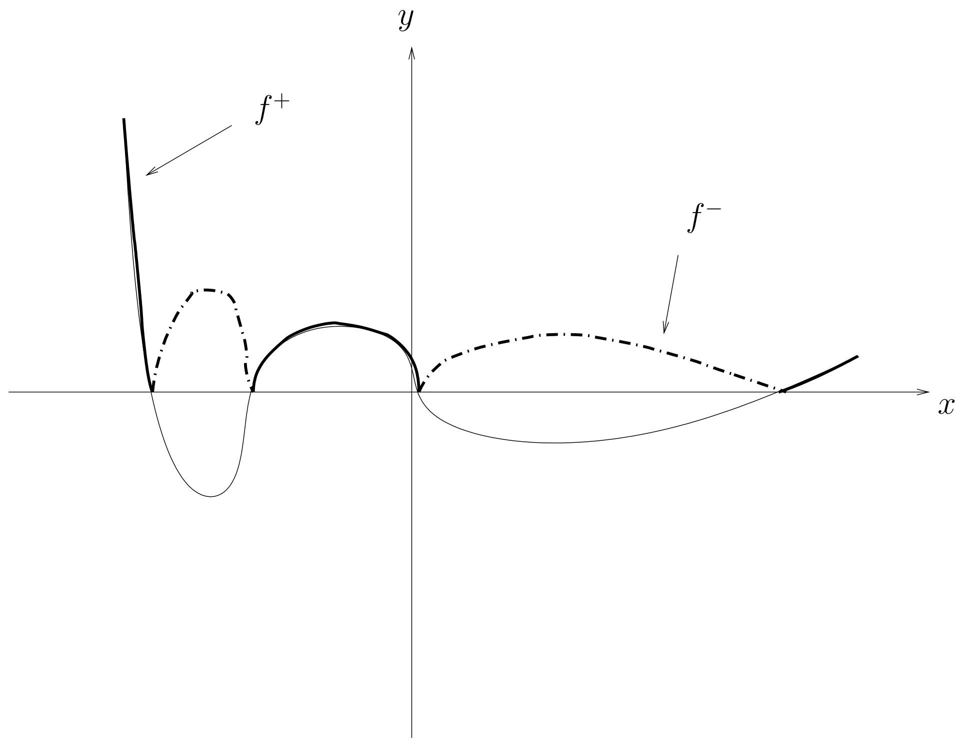


Figure 22: Parte Positiva ($f+$) e Parte Negativa ($f-$) de f

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

e como tanto f^+ como f^- são positivas,

$$|f(x)| \geq f^+ \qquad \text{e} \qquad |f(x)| \geq f^-$$

então a convergência de $\int_a^\infty |f|$ e o critério de majoração implicam a convergência de $\int_a^\infty f^+$ e de $\int_a^\infty f^-$. Finalmente, como $f = f^+ - f^-$, então $\int_a^\infty f$ é convergente através da Proposição 13.3. ■

Observação 13.2

De um modo geral, não é verdade que a convergência de $\int_a^\infty f$ implique a convergência de $\int_a^\infty |f|$.

Definição 13.4

Se $\int_a^\infty |f|$ converge diz-se que $\int_a^\infty f$ é **absolutamente convergente**.
Se $\int_a^\infty f$ converge mas $\int_a^\infty |f|$ **não** converge, diz-se que $\int_a^\infty f$ é **simplesmente convergente**.

13.4 Aplicações do Teorema dos resíduos ao cálculo de integrais impróprios

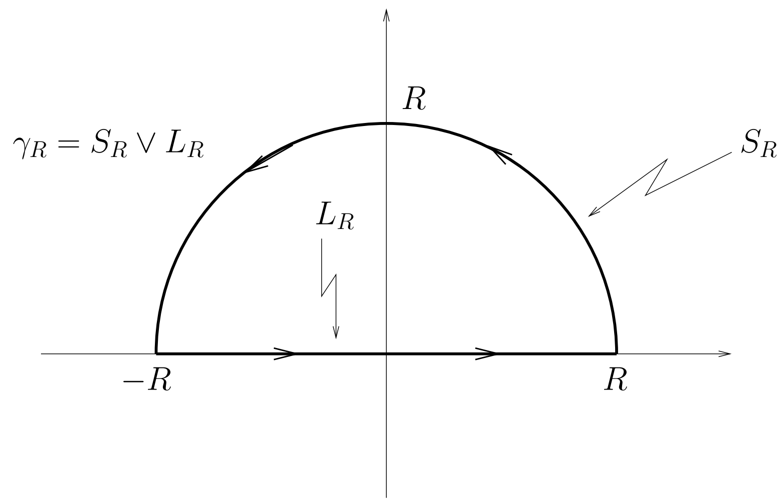


Figure 23: Curva γ_R

13.4.1 Resultados auxiliares

Proposição 13.5 *Seja $f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ uma função contínua sobre a curva γ, formada pela justaposição da semi-circunferência, S, com centro em $0 + i0$ e raio R, parametrizada por $S(t) = Re^{it}$, com $t \in [0, \pi]$, e pelo segmento de recta, L, de comprimento $2R$, com origem em $-R + i0$ e extremidade $R + i0$ (ver Figura 23). Então*

1. *Se existem constantes $M > 0$ e $k > 1$ tais que para z sobre S se tem $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, então*

$$\lim_{R \mapsto +\infty} \int_S f = 0$$

2. *Se existem constantes $M > 0$ e $k > 0$ tais que para z sobre S se tem $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, então*

$$\lim_{R \mapsto \infty} \int_S e^{imz} f(z) dz = 0 \qquad m$$

Dem.

1. Se f é tal que, para z sobre S se tem $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, com $M > 0$ e $k > 1$, pela majoração do integral

$$\left| \int_S f \right| \leq \frac{M}{R^k} \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}} \underset{R \mapsto \infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{já que } k > 1$$

2. Suponha-se que f é tal que para z sobre S se tem $|f(z)| \leq \frac{M}{R^k}$, com $M > 0$ e $k > 0$. Tem-se

$$\left| \int_S e^{imz} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi e^{im(R\cos t) + iR\sin t)} f(Re^{it}) iRe^{it} dt \right| \leq \int_0^\pi \left| e^{im(R\cos t + i\sin t)} f(Re^{it}) iRe^{it} \right| dt \leq$$

$$\leq \int_0^\pi e^{-mR\sin t} \frac{M}{R^k} R dt = \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^\pi e^{-mR\sin t} dt = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin t} dt = \ldots$$

já que

$$\int_{\pi/2}^\pi e^{-mR\sin t} dt = \int_{\pi/2}^\pi e^{-mR\sin \pi - t} dt =$$

$$= \Big(u = \pi - t, du = -dt, t = \pi/2 \Rightarrow u = \pi/2, t = \pi \Rightarrow u = 0 \Big) \int_{\pi/2}^0 e^{-mR\sin u} (-du) =$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin u} du$$

Como para $0 < t < \pi/2$ a função $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ decresce à medida que t cresce, conclui-se que, para $0 \leq t \leq \pi/2$, $\varphi(t) \geq \varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}$, e portanto,

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \sin t \geq \frac{2t}{\pi}$$

e voltando ao cálculo do módulo do integral

$$\cdots = \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-mR\sin t} dt \leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2mRt/\pi} dt = \frac{\pi M}{mR^k} \left(1 - e^{-mR}\right) \underset{R\mapsto\infty}{\longrightarrow} 0$$

terminando a demonstração.

■

Observações:

1. Para $m < 0$ o resultado da Proposição anterior mantem-se válido desde que se considere a curva γ orientada no sentido directo mas com a semi-circunferência no semi-plano $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) \leq 0\}$

2. Seja
$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$
um função racional própria isto é, $P(z)$ e $Q(z)$ são polinómios e o grau de $P(z)$, m é estritamente menor que o grau de $Q(z)$, n. Então, existem, $M > 0$ e $R > 0$ tais que para $|z| > R$ se tem
$$|f(z)| = \left|\frac{P(z)}{Q(z)}\right| \leq \frac{M}{R^k} \qquad \text{com } k = m - n$$

13.4.2 Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$

Seja γ_R a linha formada pela justaposição de uma semi-circunferência S_R de centro na origem e raio R (parametrização: $z = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$) e o segmento de recta L_R com origem em $(-R, 0)$ e extremidade $(R, 0)$ (ver Figura 23).

Seja $F(x)$ uma função real de variável real x integrável em cada intervalo fechado e limitado de $\mathbb{R}$ e tal que
$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$$
converge. Considere-se a função complexa de variável complexa z, obtida substituindo x por z na expressão de F. Chamamos a esta função F tambem. Então

$$\int_{\gamma_R} F(z)dz = \int_{-R}^{R} F(x)dx + \int_{S_R} F(z)dz$$

Suponha-se que, para todo o $z \in S_R$ se tem

$$|F(z)| \leq \frac{M}{R^k} \qquad \text{com } M > 0, k > 1$$

Então, pela Proposição 13.5 tem-se
$$\lim_{R\mapsto\infty} \int_{S_R} F(x)dx = 0$$
donde

$$\lim_{R\mapsto\infty} \int_{S_R} F(z)dz = \lim_{R\mapsto\infty} \int_{-R}^{R} F(x)dx + \lim_{R\mapsto\infty} \int_{S_R} F(z)dz = \lim_{R\mapsto\infty} \int_{-R}^{R} F(x)dx = V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$$

Observações

1. No caso de F ser uma função par, tem-se

$$\int_{-R}^{R} F(x)dx = 2\int_{0}^{R} F(x)dx$$

Nestas circunstâncias obtem-se

$$\lim_{R\mapsto\infty}\int_{S_R} F(z)dz = 2\int_{0}^{+\infty} F(x)dx$$

2. Pode acontecer que haja menos singularidades para $Im\,z < 0$. Nestas circunstâncias é preferível integrar $F(z)$ em $-\gamma_R$ (ver Figura 24) obtendo-se:

$$V.P.\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = -\lim_{R\mapsto\infty}\int_{S_R} F(z)dz$$

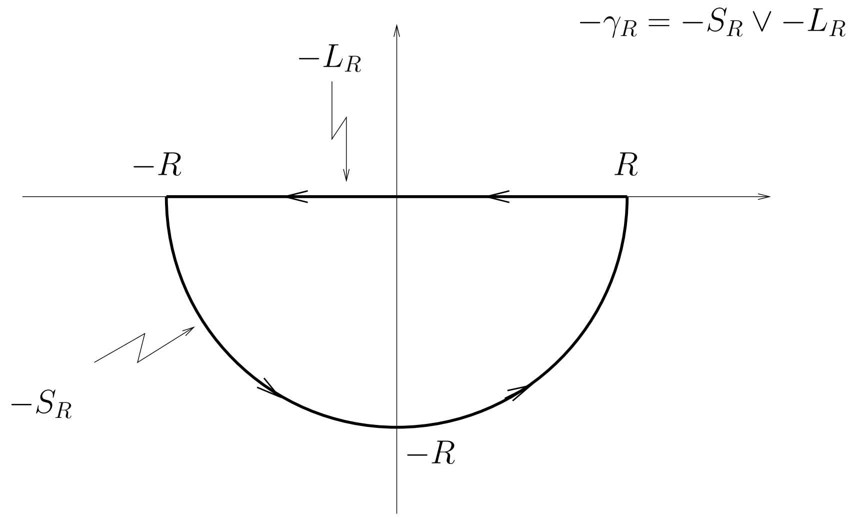


Figure 24: Curva $-\gamma_R$

Exemplo:
Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Como

$$\left|\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}\right| = \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2} \leq \frac{1}{x^4}$$

então $\frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$ é dominanda por uma função cujo integral impróprio converge. Então, pelo critério da majoração

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2}$$

converge.

Considere-se então

$$F(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)^2} = \frac{1}{\left((z+i)(z-i)\right)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2}$$

F tem polos duplos em i e em $-i$. O resíduo $res\,(F,i)$

$$res\,(F,i) = \lim_{z\mapsto i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\right] = \lim_{z\mapsto i}\frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+i)^2}\right] = \frac{1}{4i} = \frac{-i}{4}$$

Então, pelo Teorema dos resíduos (Proposição 13.1) obtem-se

$$\int_{\gamma_R} F(z)dz = 2\pi i(-\frac{i}{4}) = \frac{\pi}{2}$$

Por outro lado, para z em S_R vem

$$\left|\frac{1}{\left(z^2+1\right)^2}\right| \leq \frac{1}{|z^2+1|^2} \leq \frac{1}{|z^2-(-1)|^2} \leq \frac{1}{\left||z|^2-1\right|^2} \leq \frac{1}{\left||z|^2-\frac{|z|^2}{2}\right|^2} \leq \frac{1}{\left|\frac{|z|^2}{2}\right|^2} = \frac{4}{|z|^4} = \frac{4}{R^4}$$

donde concluímos, pela Proposição 13.5 que

$$\lim_{R\mapsto\infty}\int_{S_R} F(z)dz = 0$$

e portanto

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+1\right)^2} = \lim_{R\mapsto\infty}\int_{\gamma_R} F(z)dz = \frac{\pi}{2}$$

13.4.3 Integrais do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos(mx)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin(mx)dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{imxdx}$, com m real

Comecemos por considerar integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{imxdx}$$

e consideremos a função

$$G(z) = e^{imz}F(z)$$

Suponhamos ainda que F nao tem singularidades sobre o eixo real e que para cada z em S_R, mantendo a notação de trás,

$$|F(z)| \leq \frac{M}{R^k} \qquad \text{com } M>0 \text{ e } k>0$$

Nestas circunstâncias, pela Proposição 13.5 tem-se

$$\lim_{R\mapsto\infty}\int_{S_R} e^{imz}F(z)dz = 0$$

Então, já que

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{imxdx} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos(mx)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin(mx)dx$$

tem-se

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos(mx)dx = Re\left[\lim_{R\mapsto\infty}\int_{\gamma_R} e^{imz}F(z)dz\right]$$

e

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin(mx)dx = Im\left[\lim_{R\mapsto\infty}\int_{\gamma_R} e^{imz}F(z)dz\right]$$

Exemplo:
Calcular
$$\int_0^\infty \frac{\cos(mx)}{x^2+1}dx$$
Para isso vamos calcular, mantendo a notação de trás para as curvas sobre as quais integramos,
$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz$$
Os pontos i e $-i$ são polos simples da integranda mas só nos vai interessar o polo i, pois é esse que está no interior de γ_R. Com $F(z) = \frac{e^{imz}}{z^2+1}$
$$res\,(F,i) = \lim_{z\mapsto i}(z-i)\frac{e^{imz}}{z^2+1} = \lim_{z\mapsto i}\frac{e^{imz}}{z+i} = \frac{e^{imi}}{2i} = -\frac{i}{2e^m}$$
donde
$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = 2\pi i\frac{-i}{2e^m} = \frac{\pi}{e^m}$$
Como para z sobre C_R se tem
$$\left|\frac{1}{z^2+1}\right| \leq \frac{1}{R^2-1} \leq \frac{1}{R^2-R^2/2} \leq \frac{2}{R^2}$$
então pela Proposição 13.5
$$\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} \frac{e^{imz}}{z^2+1}dz = 0$$
portanto,
$$V.P. \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(mx)}{x^2+1}dx = \pi e^{-m}$$
onde deixamos os últimos detalhes para quem estiver a ler.

13.4.4 Integrais do tipo $\int_{-\infty}^\infty F(x)\cos(mx)dx$, $\int_{-\infty}^\infty F(x)\sin(mx)dx$ e $\int_{-\infty}^\infty F(x)e^{imxdx}$, onde $F(z)$ tem uma infinidade de polos

Seja então $F(z)$ uma função com um infinidade de polos (embora sem singularidades sobre o eixo real). Um exemplo de uma tal F é
$$F(z) = \frac{1}{\cosh(z)} = \frac{2}{e^z+e^{-z}}$$
que tem polos simples em todos os pontos da forma
$$z_k = i(2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$
Uma vez que polos são singularidades isoladas, por maior que seja R (mantendo a notação de trás), haverá sempre polos fora da semi-circunferência S_R. Há então que introduzir uma nova técnica para tratar destes problemas.

A curva γ que escolhemos nestas circunstâncias é do tipo ilustrado na Figura 25. Assim, o parâmetro K é constante e ajustado de forma a haver, por exemplo, só um polo no interior da curva $\gamma_{R,S}$. Os parâmetros R e S são feitos tender para infinito. Vejamos o exemplo concreto:
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x/2}}{\cosh x}dx$$

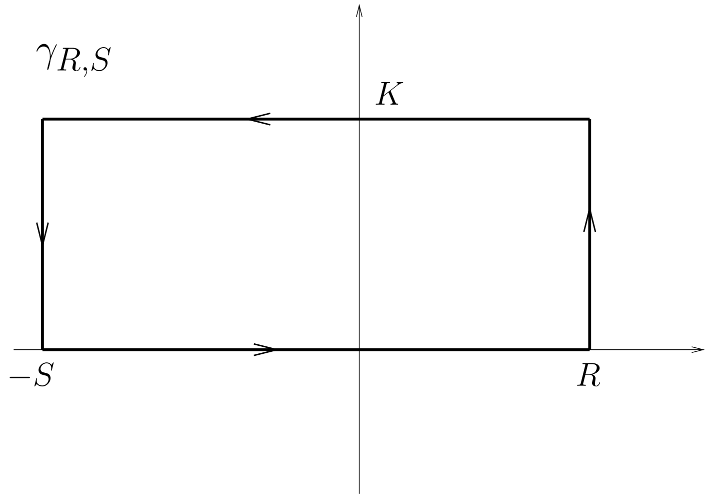


Figure 25: A curva $\gamma_{R,S}$ para integrandas com infinitos polos

Usando a função

$$F(z) = \frac{e^{z/2}}{\cosh z}$$

que tem uma infinidade de polos simples da forma

$$z_k = i(2k+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{com } k \in \mathbb{Z}$$

como já dissemos. Escolhendo $K = \pi$ só há, no entanto, uma singularidade interior a $\gamma_{R,S}$, que é $i\frac{\pi}{2}$. O resíduo de F nessa singularidade é

$$res\,(F, i\frac{\pi}{2}) = \lim_{z\to i\pi/2}\Big(z - i\pi/2\Big)F(z) = \cdots = -ie^{i\pi/4} \qquad \text{... porquê? ...}$$

Argumentando como de outras vezes, temos:

$$2\pi e^{i\pi/4} = 2\pi i\cdot\left(-ie^{i\pi/4}\right) = \int_{\gamma_{R,S}} \frac{e^{z/2}}{\cosh z}dz = \int_R^{-S} \frac{e^{(i\pi+x)/2}}{\cosh(i\pi+x)}dx + \int_{-S}^R \frac{e^{x/2}}{\cosh(x)}dx + \int_0^\pi \frac{e^{(R+iy)/2}}{\cosh(R+iy)}idy +$$
$$+\int_\pi^0 \frac{e^{(-S+iy)/2}}{\cosh(-S+iy)}idy = \ldots$$

mas

$$\left|\int_0^\pi \frac{e^{(R+iy)/2}}{\cosh(R+iy)}idy\right| \le \int_0^\pi \left|\frac{2e^{(R+iy)/2}}{e^{(R+iy)}+e^{-(R+iy)}}\right|dy \le \int_0^\pi \frac{2e^{R/2}}{|e^{R+iy}|-|e^{-(R+iy)}|}dy = \pi\frac{2e^{R/2}}{e^R - e^{-R}} \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

donde

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{(R+iy)/2}}{\cosh(R+iy)}idy = 0$$

e, analogamente

$$\lim_{S\to\infty}\int_0^\pi \frac{e^{(-S+iy)/2}}{\cosh(-S+iy)}idy = 0$$

e, portanto, no limite $R \longrightarrow \infty$ e $S \longrightarrow \infty$

$$2\pi e^{i\pi/4} = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x/2}}{\cosh x}dx - \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(i\pi+x)/2}}{\cosh(i\pi+x)}dx = \cdots = (1+i)\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x/2}}{\cosh x}dx$$

e finalmente

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{x/2}}{\cosh x}dx = \pi\sqrt{2}$$

13.4.5 Integrais do tipo $\int_0^{2\pi} G(\sin(t), \cos(t))dt$, em que G é uma função racional de $\sin t$ e de $\cos t$

Seja a circunferência de centro na origem e raio 1 parametrizada por $z = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. A mudança de variável

$$z = e^{it}, \quad \sin t = \frac{z - 1/z}{2i}, \quad \cos t = \frac{z + 1/z}{2}, \quad dt = \frac{dz}{iz}$$

transforma o integral dado num integral do tipo

$$\int_\gamma F(z)dz$$

onde F é um quociente de polinómios complexos que, em princípio, se pode calcular com as técnicas desenvolvidas atrás.

Calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + a\cos t} \qquad \text{com } a \in \mathbb{R} \text{ e } |a| < 1$$