1. Encontre todas as soluções das equações:

$$a) \quad e^w = i \qquad\qquad b) \quad e^w = 1+i \qquad\qquad c) \quad e^w = -2$$

2. Calcule o valor principal do logaritmo para

$$a) \quad z = i \qquad\qquad b) \quad z = 1+i \qquad\qquad c) \quad z = -2$$

3. Mostre que as seguintes funções satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em $z = 0 + i0$ embora não sejam diferenciáveis nesse ponto:

$$f(z) = \begin{cases} \overline{z^3}/|z|^2, & \text{se } z \neq 0 + i0 \\ 0 + i0, & \text{se } z = 0 + i0 \end{cases}$$

$$g(x+iy) = \begin{cases} (x^{4/3}y^{5/3} + ix^{5/3}y^{4/3})/(x^2+y^2), & \text{se } z \neq 0 + i0 \\ 0 + i0, & \text{se } z = 0 + i0 \end{cases}$$

4. Use as condições de Cauchy-Riemann para mostrar que as seguintes funções não são diferenciáveis:

$$f(x+iy) = 2y - ix$$

5. Mostre que

$$h(z) = x^3 + 3xy^2 - 3x + i(y^3 + 3x^2y - 3y)$$

é diferenciável ao longo dos eixos coordenados mas não é holomorfa em nenhum domínio.

6. Mostre que são holomorfas as funções:

$$g(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y) \quad \text{escreva esta função à custa de } z$$
$$h(z) = e^{x^2-y^2}\big(\cos(2xy) + i\sin(2xy)\big) \quad \text{qual é a derivada desta função?}$$

7. Escreva as condições de Cauchy-Riemann em termos de r e θ.

8. Mostre que se f é uma função holomorfa com u e v duas vezes diferenciáveis e com segundas derivadas contínuas, então u e v são funções harmónicas isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$