1. Considere a equação de 2a. ordem

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Mostre que ela corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -q(t)x_1 - p(t)x_2 \end{cases}$$

Mostre que se $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ constituem um conjunto fundamental de soluções do sistema de equações, e se $y^{(1)}$ e $y^{(2)}$ constituem um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial de 2a. ordem, então

$$W[y^{(1)}, y^{(2)}] = cW[\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}]$$

onde c é uma constante não nula. Sugestão: $y^{(1)}(t)$ e $y^{(2)}(t)$ são combinações lineares de $x_{11}(t)$ e de $x_{12}(t)$.

2. Encontre a solução geral dos seguintes sistemas de equações diferenciais:

$$a) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad b) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad c) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

$$d) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

3. Resolva os PVI's

$$a) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad b) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Os seguintes problemas envolvem um parâmetro α. Calcule os valores e vectores próprios da matriz dos coeficientes em termos de α. Encontre o(s) valor(es) de α para os quais a natureza das soluções se altera. Descreva o retrato de fases um pouco antes e um pouco depois desse(s) valor(es) de α.

$$a) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{x}, \qquad b) \quad \mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ \alpha & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x},$$