Análise Complexa e Equações Diferenciais - Tagus Park
1o. Semestre 2007/2008
1o. Teste **Duração: 90 minutos** **20 de Outubro de 2007**

1. Em $\mathbb{C}$, calcule as soluções da equação
$$z^2 - 2z - i = 0$$
apresentando-as na forma algébrica, $a + ib$.

2. Seja f um função holomorfa definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Mostre que se $Im\, f(z)$ é uma função constante, então f é uma função constante.

3. Para cada n inteiro, considere o integral
$$\int_{\gamma_R} (z - z_0)^n dz$$
onde γ_R é uma circunferência de raio $R > 0$ e centro em z_0. Calcule este integral em função de n, **fazendo uma parametrização apropriada de γ_R**.

4. Apresente a série de McLaurin da função
$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2}$$
indicando qual o raio de convergência absoluta dessa série. Aproveite ainda para calcular $f^{(37)}(0)$.

5. **Usando a fórmula integral de Cauchy**, calcular o integral
$$\int_C \frac{\sin(z)}{z^2 + \pi^2} dz \qquad \text{onde } C = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| = 2\}$$

6. Na coroa circular indicada, escreva a série de Laurent da função
$$f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^5} \qquad 0 < |z|$$
classificando completamente a singularidade em torno da qual efectuou o desenvolvimento.

7. Qual a natureza de
$$\int_3^{+\infty} \frac{x^3 + 5\cos x + 5}{x^7 + 3x^4 + \pi} dx \qquad ?$$

8. Sendo a um número real não nulo, calcule
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx$$