Análise Complexa e Equações Diferenciais - Tagus Park
1o. Semestre 2007/2008
1o. Teste (Recuperação) Duração: 90 minutos 3 de Janeiro de 2008
Justifique as suas respostas

1. Em $\mathbb{C}$, calcule as soluções da equação
$$z^4 - 2iz^2 - 2 = 0$$
apresentando-as na forma algébrica, $a + ib$.

2. Seja f um função analítica definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Mostre que se $|f(z)|$ é uma função constante, então f é uma função constante.

3. Para cada n inteiro, considere o integral
$$\int_{\gamma_R} (z - z_0)^n dz$$
onde γ_R é uma circunferência de raio $R > 0$ e centro em z_0. Calcule este integral em função de n, **fazendo uma parametrização apropriada de** γ_R.

4. Apresente a série de McLaurin da função
$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$$
Aproveite ainda para calcular $f^{(37)}(0)$.

5. **Usando a fórmula integral de Cauchy**, calcular o integral
$$\int_C \frac{\cos(z)}{z} dz \qquad \text{onde } C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$
Escrevendo este integral na forma paramétrica obtenha o valor de
$$\int_0^{2\pi} \cos(\cos\theta)\cosh(\sin\theta) d\theta$$

6. Escreva a série de Laurent em torno de $z = 0$ da função
$$f(z) = \frac{z - \sin(z)}{z^5} \qquad 0 < |z|$$
especificando a coroa circular onde a série converge e classificando completamente a singularidade em torno da qual efectuou o desenvolvimento.

7. Qual a natureza de
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x} dx \qquad ?$$

8. Sendo a um número real não nulo, calcule
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{(x^2 + a^2)^2} dx$$