Análise Complexa e Equações Diferenciais - Tagus Park
1o. Semestre 2007/2008
1o. Teste **Duração: 90 minutos** **20 de Outubro de 2007**

1. Em $\mathbb{C}$, calcule as soluções da equação

$$z^2 - 2z - i = 0$$

apresentando-as na forma algébrica, $a + ib$.

   - Usando a fórmula resolvente, obtemos

$$z_{\pm} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-i)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(1+i)}}{2} = 1 \pm \sqrt{1+i} = \cdots$$

   Por outro lado, as soluções de $w^2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ são

$$w_0 = \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\pi/8} \qquad w_1 = -\sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\pi/8}$$

   (e basta usar só uma ...)

$$\cdots\ 1 \pm \sqrt{\sqrt{2}}\, e^{i\pi/8} = 1 \pm \sqrt[4]{2}\cos(\pi/8) \pm i\sqrt[4]{2}\sin(\pi/8)$$

   donde as soluções na forma algébrica são

$$z_+ = 1 + \sqrt[4]{2}\cos(\pi/8) + i\sqrt[4]{2}\sin(\pi/8) \qquad z_- = 1 - \sqrt[4]{2}\cos(\pi/8) - i\sqrt[4]{2}\sin(\pi/8)$$

2. Seja f um função holomorfa definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Mostre que se $Im\, f(z)$ é uma função constante, então f é uma função constante.

   - Suponhamos que f não é constante. Então existe um ponto $z_0 = x_0 + iy_0$ onde alguma das derivadas parciais das partes real e/ou imaginária não se anula, acusando o facto de a função não ser constante. Mas como a função é holomorfa no domínio Ω e a sua parte imaginária é constante então

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}$$

   e porque f é holomorfa então as suas partes reais e partes imaginárias satisfazem as condições de Cauchy-Riemann em todos os pontos de Ω

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

   mas então as derivadas parciais das partes real e imaginária são sempre nulas e portanto f é constante.

3. Para cada n inteiro, considere o integral

$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz$$

onde γ_R é uma circunferência de raio $R>0$ e centro em z_0. Calcule este integral em função de n, **fazendo uma parametrização apropriada de γ_R.**

- Fazendo

$$z = z_0 + Re^{it} \qquad \text{com } t \in [0, 2\pi] \qquad \text{e notando que } dz = iRe^{it}dt$$

tem-se

$$\int_{\gamma_R} (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (z_0 + Re^{it} - z_0)^n iRe^{it} dt = R^{n+1} \int_0^{2\pi} ie^{i(n+1)t} dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{R^{n+1}}{n+1} \int_0^{2\pi} i(n+1)e^{i(n+1)t}dt, & n \neq -1 \\ \int_0^{2\pi} idt, & n = -1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{R^{n+1}}{n+1} \left[e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi}, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{R^{n+1}}{n+1} \left(e^{i(n+1)2\pi} - e^0 \right), & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases}$$

4. Apresente a série de McLaurin da função

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 2}$$

indicando qual o raio de convergência absoluta dessa série. Aproveite ainda para calcular $f^{(37)}(0)$.

- $$\frac{z}{z^2+z-2} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-1} = \cdots$$

onde

$$A = \frac{z}{z-1}\bigg|_{z=-2} = \frac{-2}{-2-1} = \frac{2}{3} \qquad \text{e} \qquad B = \frac{z}{z+2}\bigg|_{z=1} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

e portanto,

$$\cdots = \frac{2/3}{z+2} + \frac{1/3}{z-1} = \frac{2}{3}\frac{1}{2(1+\frac{z}{2})} - \frac{1}{3}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \cdots$$

onde a primeira série converge absolutamente para $|z/2| < 1$ isto é, $|z| < 2$, enquanto que a segunda série converge para $|z| < 1$,

$$\cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^n}{2^n} - 1\right) z^n$$

sendo esta série absolutamente convergente nos pontos onde ambas as séries anteriores eram convergentes isto é, para $|z| < 1$. Finalmente,

$$f^{(37)}(0) = \frac{1}{3}\left(\frac{(-1)^{37}}{2^{37}} - 1\right)\cdot 37! = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2^{37}} - 1\right)37!$$

5. **Usando a fórmula integral de Cauchy**, calcular o integral

$$\int_C \frac{\sin(z)}{z^2+\pi^2}dz \qquad \text{onde } C = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i| = 2\}$$

- $$\int_C \frac{\sin(z)}{z^2+\pi^2}dz = \int_C \frac{\sin(z)}{(z+i\pi)(z-i\pi)}dz = \cdots$$

  e como

  $$|-i\pi-2i| = |\pi+2| > 2 \qquad \text{enquanto que} \qquad |i\pi-2i| = |\pi-2| < 2$$

  concluímos que i é "interior" a C e $-i$ não é "interior" a C. Retomando o cálculo:

  $$\cdots = \int_C \frac{\frac{\sin(z)}{z+i\pi}}{z-i\pi}dz = 2\pi i \cdot \left.\frac{\sin(z)}{z+i\pi}\right|_{z=i\pi} = \sin(i\pi)$$

  onde na penúltima igualdade se usou a fórmula integral de Cauchy, notando que a função

  $$f(z) = \frac{\sin(z)}{z+i\pi}$$

  é holomorfa num domínio contendo C.

6. Na coroa circular indicada, escreva a série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{z-\sin(z)}{z^5} \qquad\qquad 0 < |z|$$

classificando completamente a singularidade em torno da qual efectuou o desenvolvimento.

- $$\frac{z-\sin(z)}{z^5} = \frac{z - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}{z^5} = \frac{z - \frac{(-1)^0}{(2\cdot 0+1)!}z^{2\cdot 0+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}{z^5} =$$

  $$= \frac{-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}}{z^5} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} z^{2n-4} = \cdots$$

  Fazendo $2n-4 = 2k$ vem $k = n-2$, $2n+1 = 2k+5$, $n+1 = k+3$ e quando era $n = 1$ será agora $k = -1$, donde

  $$\cdots = \sum_{n=-1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+3}}{(2n+5)!} z^{2k}$$

  e esta é então a série de Laurent pedida. O ponto em torno do qual se faz o desenvolvimento, $z_0 = 0$, é um polo já que há um expoente negativo de z cujo coeficiente correspondente da série é não nulo - para $k = -1$, o expoente de z é $2 \cdot (-1) = -2$ e o coeficiente correspondente da série é $\frac{(-1)^{-1+3}}{(2\cdot(-1)+5)!} = \frac{1}{6} \neq 0$. Como este é o único expoente negativo de z cujo coeficiente correspondente da série é não nulo, então este é tambem o menor deles. Como este expoente é -2, $z_0 = 0$ é um polo de ordem 2.

7. Qual a natureza de
$$\int_3^{+\infty} \frac{x^3+5\cos x+5}{x^7+3x^4+\pi}dx \qquad ?$$

- $$\frac{\frac{x^3+5\cos x+5}{x^7+3x^4+\pi}}{\frac{x^3}{x^7}} = \frac{x^3+5\cos x+5}{x^3}\frac{x^7}{x^7+3x^4+\pi} = \frac{1+\frac{5\cos x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{1}\frac{1}{1+\frac{3}{x^3}+\frac{\pi}{x^7}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}$$
$$\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1+0+0}{1}\frac{1}{1+0+0} = 1$$

  Sendo $0 < 1 < +\infty$ então, pelo **CRITÉRIO** do limite, os **INTEGRAIS IMPRÓPRIOS**
  $$\int_3^{+\infty} \frac{x^3+5\cos x+5}{x^7+3x^4+\pi}dx \qquad \text{e} \qquad \int_3^{+\infty} \frac{x^3}{x^7}dx$$
  têm a mesma natureza. Como o **INTEGRAL IMPRÓPRIO**
  $$\int_3^{+\infty} \frac{x^3}{x^7}dx = \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^4}dx$$
  e $4 > 1$, então este integral é convergente, como vimos nas aulas teóricas. Como este tem a mesma natureza do outro, segue que
  $$\int_3^{+\infty} \frac{x^3+5\cos x+5}{x^7+3x^4+\pi}dx$$
  é convergente.

8. Sendo a um número real não nulo, calcule
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$$

- **Usando a notação das aulas**, consideremos o integral
  $$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}dz = \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}dz =$$
  A função integranda
  $$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} = \frac{z^2}{(z+ia)^2(z-ia)^2}$$
  tem dois polos duplos em ia e $-ia$ (porquê?). Só o ia é que é "interior" a γ_R, portanto só esse nos vai interessar no cálculo deste integral. O resíduo da f em ia é:
  $$res\,(f, ia) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to ia}\frac{\mathrm{d}^{2-1}}{\mathrm{dz}^{2-1}}\,(z-ia)^2 f(z) = \lim_{z\to ia}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\frac{z^2}{(z+ia)^2} =$$
  $$= \lim_{z\to ia}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\frac{2z(z+ia)^2 - z^2 2(z+ia)}{(z+ia)^4} = \frac{2ia(2ia)^2-(ia)^2 2(2ia)}{(2ia)^4} =$$
  $$= \frac{(2ia)^3(1-1/2)}{(2ia)^4} = \frac{1/2}{2ia} = -\frac{i}{4a}$$

Pelo Teorema dos resíduos, temos

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} dz = 2\pi i \cdot \big(- \frac{i}{4a} \big) = \frac{\pi}{2a}$$

Por outro lado, **mantendo a notação das aulas**,

$$\frac{\pi}{2a} = \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} dz = \int_{S_R} \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} dz + \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} \cdots$$

e como, para $|z| = R > |a|$, se tem

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left| \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2} \right| = \frac{|z|^2}{|z^2+a^2|^2} = \frac{|z|^2}{|z^2 - \big(-a^2\big)|^2} \leq \frac{|z|^2}{\big(|z|^2 - |-a|^2\big)^2} = \\ &= \frac{|z|^2}{\big(|z|^2 - |a|^2\big)^2} \leq \frac{|z|^2}{\big(|z|^2 - |z|^2/2\big)^2} = \frac{4}{|z|^2} = \frac{4}{|R|^2} \end{aligned}$$

e como o expoente do R é maior que 1 e a constante no numerador é maior que 0, sabemos das teóricas que a contribuição do integral sobre S_R tende para 0 quando R tende para $+\infty$, donde

$$\cdots \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx$$

Finalmente,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2} dx = \frac{\pi}{2a}$$

já que $\frac{\pi}{2a}$ é independente de R e para cada $R > a$, ia é "interior" a γ_R.