Análise Complexa e Equações Diferenciais - Tagus Park
1o. Semestre 2007/2008
3o. Teste **Duração: 90 minutos** **15 de Dezembro de 2007**
Justifique as suas respostas

1. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x} \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ -2e^{2t} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

3. Sendo α um parâmetro real, considere o sistema de equações diferenciais:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ -8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

   Calcule os valores próprios da matriz dos coeficientes. Diga quais são os valores de α para o qual o caracter qualitativo das soluções se altera.

4. Usando séries de Fourier, encontre a solução formal do PVI

$$y'' + \omega^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \qquad y(0) = 0 = y'(0)$$

5. Mostre que, para $0 < t < \pi$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}t$$

6. Considere uma barra cilindrica de material condutor térmico, com 40 de comprimento, em que uma das extremidades está sempre à temperatura 0 e a outra à temperatura 20. Suponha ainda que inicialmente a barra tem uma distribuição de temperaturas dada por $f(x) = x$ e que a constante $a^2 = 1$. Escreva a distribuição de temperaturas $u(x,t)$ num instante posterior t. Escreva tambem a distribuição de temperaturas no regime estacionário.

7. Resolva a equação de Laplace, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, no rectângulo $0 \le x \le a$, $0 < y < b$, sujeita às seguintes condições fronteira:

$$\begin{array}{lll} u_x(0,y) = 0 & u_x(a,y) = f(y) & (0 < y < b) \\ u_y(x,0) = 0 & u_y(x,b) = 0 & (0 \le x \le a) \end{array}$$

   A função f deve satisfazer alguma condição?