Análise Complexa e Equações Diferenciais - Tagus Park
1o. Semestre 2007/2008
3o. Teste (Recuperação) Duração: 90 minutos 3 de Janeiro de 2008
Justifique as suas respostas

1. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \qquad \mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. Começando por convertê-la num sistema de equações diferenciais de primeira ordem, encontre a solução geral da equação diferencial $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.

3. Encontre a solução geral do seguinte sistema de equações diferenciais de primeira ordem, não homogeneo:

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} e^{-3t} \\ 4e^{-3t} \end{pmatrix}$$

4. O seguinte sistema de equações diferenciais depende de um parâmetro real α. As suas soluções descrevem as trajectórias de uma partícula, em função do tempo:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & \alpha \\ 8 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Que condições deve α satisfazer para que, com o decorrer do tempo, a) a partícula se aproxime cada vez mais da origem dos eixos; b) segundo uma direcção a partícula se afaste cada vez mais e segundo outra direção a partícula se aproxime cada vez mais da origem dos eixos (explicite essas direcções em função de α). É possível esta partícula se afastar cada vez mais da origem dos eixos?

5. Sendo a um parâmetro real, considere o problema de valores na fronteira:

$$y'' + y = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad y(a) = 0$$

Para que valores de a é que este problema i) tem uma infinidade de soluções; ii) não tem solução; iii) tem exactamente uma solução.

6. Mostre que, para $0 < t < \pi$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}$$

assume sempre o mesmo valor e calcule-o.

7. Sejam a e L números reais positivos e h uma função real de variável real com 2a. derivada contínua. Mostre que $u(x,t) = (1/2)[h(x-at) + h(x+at)]$ é solução da equação de onda, $a^2 u_{xx} = u_{tt}$. Acrescentando a esta equação de onda as condições $u(0,t) = 0 = u(L,t)$, $t > 0$, e $u_t(x,0) = 0$, $u(x,0) = f(x)$, $0 \le x \le L$ (onde f é função real definida em $[0, L]$ com 2a. derivada contínua), exprima h à custa de f para que h seja solução deste problema de fronteira.