Notas de Equações Diferenciais Ordinárias

Pedro Lopes
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
1o. Semestre 2008/2009

Estas notas constituem um material de apoio ao curso de Análise Complexa e Equações Diferenciais para as licenciaturas LCERC, LCEIC, LCEE e LCEGI do Instituto Superior Técnico (Tagus Park) no 1o. semestre de 2008/2009 e não pretendem ser um substituto dos manuais escolares disponíveis.

1 Introdução

O que são equações?

Equações são condições que envolvem uma (ou mais) incognita(s). Resolver a equação significa descobrir quais os valores, quais os objectos que podemos atribuir às incognitas de modo a a equação ser satisfeita.

Por exemplo, dados $a, b, c \in \mathbb{C}$ a condição

$$az^2 + bz + cz = 0$$

envolvendo a incognita z tem soluções

$$z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta equação ($az^2 + bz + cz = 0$) é uma equação algébrica e tem por soluções números complexos.

As *equações diferenciais* tem por soluções funções. Chamam-se equações diferenciais porque as condições que as caracterizam envolvem derivadas da função incognita.

Exemplo:

$$F = ma$$

isto é, a força total exercida na massa m é igual ao valor da massa vezes a aceleração dessa massa. Mas a aceleração é a segunda derivada da posição, donde,

$$F = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

onde $r = r(t)$ é a posição da massa. Finalmente, a força escreve-se em função da posição, quiçá da velocidade dr/dt, quiçá explicitamente em função do tempo, etc. etc, :

$$F(r, dr/dt, t, \dots) = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

Obtemos assim, uma equação diferencial cuja incognita é a função que dá a posição da massa m em função do tempo. De outro modo, encontrar uma expressão para a posição da massa em função do tempo equivale a resolver esta equação. Vejamos, um caso "concreto" em que podemos escrever explicitamente a força exercida na massa m: o caso de duas massas, M e m, isoladas, por exemplo dois planetas "muito" afastados de todos os outros... Assim, a força exercida sobre cada um deles é

$$-G\frac{Mm}{r^2}$$

apontando para o outro planeta (a força gravítica é atractiva). G é a constante gravítica universal; r é a distância entre as duas massas. Então, o $F = ma$ é aqui

$$-G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{d^2r}{dt^2}$$

onde o $r = r(t)$ significa aqui a distância, em função do tempo, da massa m à massa M. A expressão simplifica-se para:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{M}{r^2}$$

Descobrir a distância da massa m à massa M equivale então a integrar esta equação diferencial, isto é a resolver esta equação diferencial, isto é a conseguir escrever a expressão da função $r = r(t)$ que satisfaz a dada equação diferencial, à custa dos parâmetros G e m, e da variável independente t. Da Física passámos à Matemática ...

De passagem, note-se que esta é uma equação diferencial ordinária, visto que a função incognita só envolve uma variável, t. Esta é tambem uma equação de segundo grau pois o grau máximo das derivadas aqui envolvidas é 2.

Vamos, no entanto, começar pelas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem isto é, aquelas que só envolvem derivadas de primeira ordem e cuja função incognita só depende de uma variável.

1.1 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Dadas constantes $a \neq 0$ e b, considere-se a equação

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b$$

Podemos reescrever esta equação da seguinte maneira:

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b = -a\big(y - \frac{b}{a}\big)$$

donde

$$-a = \frac{\frac{dy}{dt}}{y - \frac{b}{a}} = \frac{\frac{d\left(y - \frac{b}{a}\right)}{dt}}{y - \frac{b}{a}}$$

donde

$$\frac{d}{dt}\big(-at\big) = \frac{d}{dt}\left(\log\big|y - \frac{b}{a}\big|\right)$$

donde

$$\log\left|y - \frac{b}{a}\right| = -at + C$$

onde C é uma constante. Mais ainda,

$$y - \frac{b}{a} = \pm\exp(C)\exp(-at) = c\exp(-at) \qquad \text{com } c = \pm\exp(C)$$

e finalmente,

$$y(t) = \frac{b}{a} + c\exp(-at)$$

onde c é uma constante arbitrária.

E se b em

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b$$

fosse uma função de t?. Por exemplo,

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}e^{t/3}$$

Nestas circunstâncias, tentamos introduzir uma função, chamada *factor integrante*, que denotamos $\mu(t)$. Multipliquemos ambos os lados da equação por este factor integrante. Será que obtemos uma equação mais simples?

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}\mu(t)y = \frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3}$$

mas lembrando que

$$\frac{d}{dt}\left(\mu(t)y(t)\right) = \frac{d\mu}{dt}y + \mu\frac{dy}{dt}$$

se

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{2}\mu$$

então a equação diferencial escrever-se-ia:

$$\frac{d}{dt}\Big(\mu(t)y(t)\Big) = \frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3}$$

e portanto

$$\mu(t)y(t) = \mathbf{P}\frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3} + k$$

e finalmente

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\left(\mathbf{P}\frac{1}{2}\mu(t)e^{t/3} + k\right)$$

Assim, gostaríamos de obter uma função $\mu(t)$ tal que

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{2}\mu(t)$$

De acordo com as técnicas que aprendemos acima, vem

$$\mu(t) = ce^{t/2}$$

e como esta função μ só serve para nos ajudar a resolver a equação (não faz parte da solução propriamente dita), então podemos tomá-la na forma mais simples possível isto é, coma constante $c = 1$. Assim, com as contas feitas acima, vem

$$y(t) = \frac{1}{e^{t/2}}\left(\mathbf{P}\frac{1}{2}e^{t/2}e^{t/3} + k\right) = e^{-t/2}\left(\mathbf{P}\frac{1}{2}e^{5t/6} + k\right) = e^{-t/2}\left(\frac{1}{2}\frac{6}{5}e^{5t/6} + k\right) = \frac{3}{5}e^{t/3} + ke^{-t/2}$$

Vejamos, então, o caso geral. Resolver a equação

$$\frac{dy}{dt} + ay = g(t)$$

através de um factor integrante $\mu(t)$. Passamos à equação

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + a\mu(t)y = \mu(t)g(t)$$

e argumentando como atrás, queremos obter μ tal que

$$\frac{d\mu}{dt} = a\mu$$

cuja integração dá:

$$\mu(t) = e^{at} \qquad \text{com a escolha da constante } c = 1 \text{ já discutida atrás}$$

A equação fica então

$$\frac{d}{dt}\Big(e^{at}y\Big) = e^{at}g(t)$$

donde

$$e^{at}y(t) = \mathbf{P}e^{at}g(t) + c$$

e portanto

$$y(t) = e^{-at}\mathbf{P}e^{at}g(t) + ce^{-at}$$

...complicando, e se o coeficiente que multiplica o y na equação diferencial tambem fosse função de t? Isto é, se quisésessemos resolver a equação:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t)$$

Tentamos novamente a técnica do factor integrante:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t)$$

Argumentando como atrás, gostaríamos de obter μ tal que

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \frac{d}{dt}\Big(\mu(t)y\Big)$$

Para isso, devemos ter μ solução de

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu(t)p(t)$$

Reescrevendo:

$$\frac{d\mu/dt}{\mu} = p(t)$$

donde

$$\mu(t) = \exp\big(\mathbf{P}p(t)\big)$$

e portanto

$$\mu(t) = k\exp(\mathbf{P}p(t))$$

Com tal μ ficamos com

$$\frac{d}{dt}\Big(\mu(t)y\Big) = \mu(t)g(t)$$

donde

$$\mu(t)y(t) = \mathbf{P}\mu(t)g(t) + c$$

e portanto,

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)}\Big[\mathbf{P}\mu(t)g(t) + c\Big]$$

Exemplo:

$$ty' + 2y = 4t^2 \qquad y(1) = 2$$

Rescrevendo:

$$y' + \frac{2}{t} = 4t$$

isto é, $p(t) = 2/t$, $g(t) = 4t$.

Então, o factor integrante μ aqui é

$$\mu(t) = \exp\left(\mathbf{P}\frac{2}{t}\right) = e^{2\ln t} = t^2$$

assim

$$t^2\left(y' + \frac{2}{t}y\right) = t^2 \cdot 4t \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}(t^2y) = 4t^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad t^2y(t) = t^4 + c \qquad \Leftrightarrow \qquad y(t) = t^2 + \frac{c}{t^2}$$

Por outro lado

$$2 = y(1) = 1^2 + \frac{c}{1^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad c = 1$$

e portanto

$$y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2}$$

Até agora tratámos das chamadas equações lineares de primeira ordem. Vamos agora considerar outro tipo de equações de 1o. grau e vamos tambem usar x como variável independente.

Vamos então considerar equações da forma

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Estas equações são ditas separáveis já que, reescrevendo se obtem:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad M(x)dx = -N(y)dy$$

e de cada lado do sinal "$=$" só há um tipo de variável.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{1-y^2}$$

Será esta equação separável? Quais são as soluções? Reescrevendo a equação fica

$$(1-y^2)\frac{dy}{dx} = x^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad -x^2 + (1-y^2)\frac{dy}{dx} = 0$$

e como

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right) = -x^2 \qquad \text{e} \qquad (1-y^2)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y - \frac{1}{3}y^3\right)$$

donde

$$0 = -x^2 + (1-y^2)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} + y - \frac{1}{3}y^3\right)$$

e portanto

$$-x^3 + 3y - y^3 = c$$

onde c é uma constante.

Podemos usar o mesmo procedimento para qualquer equação separável isto é da forma:

$$M(x) + N(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Encontrando as primitivas de M e de N, sejam elas H_1 e H_2:

$$H_1'(x) = M(x) \qquad H_2'(y) = N(y)$$

tem-se

$$H_1'(x) + H_2'(y)\frac{dy}{dx} = 0$$

donde

$$\frac{d}{dx}\Big[H_1(x) + H_2(y)\Big] = 0$$

e portanto

$$H_1(x) + H_2(y) = c$$

onde c é uma constante. Se adicionalmente for requerido que a solução $y = y(x)$ passe pelo ponto $y_0 = y(x_0)$, então a constante c acima fica:

$$c = H_1(x_0) + H_2(y_0)$$

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad \text{e} \qquad y(0) = -1$$

$$0 = -3x^2 - 4x - 2 + 2(y-1)\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\Big[-x^3 - 2x^2 - 2x + (y-1)^2\Big]$$

donde

$$-x^3 - 2x^2 - 2x + (y-1)^2 = c$$

com $y(0) = -1$ temos

$$c = -0^3 - 2\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + (-1-1)^2 = 4$$

donde $c = 4$.

1.2 Equações exactas e factores integrantes

Suponhamos agora que as nossas equações diferenciais de primeira ordem não são lineares nem são separáveis.

Por exemplo:

$$2x + y^2 + 2xyy' = 0$$

Esta equação não é separável nem linear. Os métodos que usámos atrás não se aplicam aqui.

Entretanto, note-se que, com

$$\psi(x,y) = x^2 + xy^2$$

se obtem

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 2x + y^2 \qquad\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 2xy$$

permitindo assim reescrever a equação na forma

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

e portanto

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d}{dx}\big(x^2 + xy^2\big)$$

e finalmente,

$$\psi(x,y) = x^2 + xy^2 = c$$

que define a solução geral da equação diferencial de forma implicita (c é uma constante arbitrária).

Suponhamos então que a nossa equação diferencial tem a forma:

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

onde M e N são funções de x e y tais que existe uma função $\psi = \psi(x,y)$ tal que

$$M(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) \qquad\qquad N(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)$$

então

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)y' = \frac{d\psi}{dx}(x,y)$$

Nestas circunstâncias, a equação diferencial $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$ diz-se exacta e as suas soluções são dadas impliciatamente por

$$\psi(x,y) = constante$$

verificando-se o seguinte resultado:

Proposição 1.1 *Dadas funções contínuas M e N definidas numa região rectangular, $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \alpha < x < \beta \quad \gamma < y < \delta\}$ com derivadas parciais contínuas M_y e N_x, considere a equação diferencial*

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

Esta equação diferencial é exacta se e só se

$$M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

em cada ponto de R. Isto é, existe uma função ψ que satisfaz

$$\psi_x(x,y) = M(x,y) \qquad \psi_y(x,y) = N(x,y)$$

se e só se $M_y(x,y) = N_x(x,y)$.

Exemplos:
Resolver a equação diferencial:

$$(y\cos(x) + 2xe^y) + (\sin(x) + x^2e^y - 1)y' = 0$$

Resolver a equação diferencial:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

1.2.1 Factores integrantes

Pode acontecer que a equação diferencial do tipo

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

não seja exacta mas que exista uma função $\mu = \mu(x,y)$ tal que

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$$

já seja exacta isto é, que

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

Sendo M e N funções dadas, pretendemos obter μ. Para isso, notemos que a equação acima se reescreve:

$$\mu_y M + M_y\mu = \mu_x N + \mu N_x \leftrightarrow M\mu_y - N\mu_x + \big(M_y - N_x\big)\mu = 0$$

A nossa função incognita aqui é a função μ e a equação diferencial que a envolve é uma equação diferencial **às derivadas parciais**. Esta equação diferencial pode ser muito mais difícil de resolver que a equa¸cão diferencial inicial.

Uma maneira de simplificar o algoritmo para obter o factor integrante μ é supô-lo função de uma única variável, por exempo x:

$$\mu = \mu(x)$$

Assim a equação acima fica:

$$-N\mu_x + \big(M_y - N_x\big)\mu = 0$$

donde

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu$$

Esta é agora uma equação linear que podemos resolver pelos métodos dados na aula passada.

Exemplo:
Resolver a equação:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

factor integrante: $\mu(x) = x$
Mas tambem

$$\mu(x,y) = \frac{1}{xy(2x+y)}$$

1.3 Existência e Unicidade

Aqui referimos que o Problema de Valores Iniciais (PVI)

$$y' = f(t, y) \qquad y(t_0) = y_0$$

tem sempre solução num intervalo contendo o ponto t_0 desde que a função f satisfaz algumas condições.

Teorema 1.1 *Se f é uma função contínua no rectângulo $R = \{(t, y) \,|\, |t| \leq a,\ |y| \leq b\}$ e se f_y é contínua no seu interior, então existe um intervalo aberto $I =]-h, +h[$ tal que para todo o $t \in I$ $y = \phi(t)$ é a solução única de $y' = f(t, y) \qquad y(t_0) = y_0$.*

2 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de 2a. Ordem

A equação diferencial ordinária linear de 2a. ordem terá o aspecto genérico:

$$\frac{d^2}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

A equação é dita **linear** se f tiver a forma:

$$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right) = g(t) - p(t)\frac{dy}{dt} - q(t)y$$

isto é, se f é linear em y e em y' e onde g, p e q são funções dadas de t. No que se segue, estas funções serão sempre funções contínuas da variá vel t sobre algum intervalo I. Sendo linear, reescrevemo-la na seguinte forma:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

Uma forma tambem corrente de equação linear de 2a. ordem é:

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = G(t)$$

que se reduz a forma de cima **caso** $P(t) \neq 0$. Tambem aqui, P, Q, R e G serão sempre funções contínuas da variável t sobre algum intervalo I.

Observação: o caracter **linear** destas equações resulta do facto de que se no lado esquerdo da igualdade nas duas equações acima trocarmos y por $c_1y_1 + c_2y_2$, onde c_1, c_2 são constantes e y_1, y_2 são funções, resulta:

$$\begin{aligned} P(t)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big)'' + Q(t)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big)' + R(t)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big) = \cdots = \\ = c_1P(t)y_1'' + c_1Q(t)y_1' + c_1R(t)y_1 + c_2P(t)y_2'' + c_2Q(t)y_2' + c_2R(t)y_2 \end{aligned}$$

ou seja, o lado esquerdo destas equações trata linearmente combinações lineares ...

As equações que não são desta forma são ditas **não lineares**, como por exemplo:

$$yy'' + (y')^2 = 0$$

Por agora só consideraremos as equações lineares.

Quanto à questão dos PVI, recordamos que para as equações de 1a. ordem precisávamos de especificar o valor da função num ponto. Agora, com as equações de 2a. ordem precisamos de especificar o valor da função e da sua derivada num ponto. Talvez faça sentido observando que agora precisamos de **integrar duas vezes ...**.

Quando o termo G ou o termo g acima é nulo, a equação é dita **homogenea**; caso contrário é dita **não homogenea**. As soluções de uma equação não-homogenea (bf linear) dependem das soluç oes da correspondente equação linear. Começaremos assim, por estudar as equações homogeneas isto é da forma:

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$$

notando desde já que para estas equações vale o seguinte resultado:

Proposição 2.1 (Princípio da Sobreposição) *Dada uma equação linear homogenea, qualquer combinação linear de soluções é outra vez uma solução.*

Dem: Dadas as soluções y_1 e y_2 da equação linear homogenea

$$P(t)y'' + Q(t)y' + R(t)y = 0$$

consideremos uma sua combinação linear genérica

$$c_1y_1 + c_2y_2 \qquad\qquad \text{onde } c_1 \text{ e } c_2 \text{ são constantes}$$

e averiguemos se esta é solução da equação:

$$\begin{aligned} P(t)\big(c_1y_1{+}c_2y_2\big)'' + Q(t)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big)' + R(t)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big) &= P(t)\big(c_1y_1'' + c_2y_2''\big) + Q(t)\big(c_1y_1' + c_2y_2'\big) + \\ + R(t)\big(c_1y_1 + c_2y_2\big) &= c_1\big(P(t)y_1'' + Q(t)y_1' + R(t)y_1\big) + c_2\big(P(t)y_2'' + Q(t)y_2' + R(t)y_2\big) = \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

em que a penúltima igualdade decorre do facto de que y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial linear e homogenea. ∎

Passemos agora a um caso particular das equações lineares homogeneas: as equações lineares homogeneas com **coeficientes constantes**, isto é, as equações de aspecto:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

onde a, b e c são constantes dadas com $a \neq 0$.

Consideremos então o PVI::

$$y'' - y = 0 \qquad\qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = -1$$

Quanto à equação diferencial $y'' - y = 0$ que se reescreve $y'' = y$, o queremos é saber quais são as funções cuja segunda derivada é igual à própria função. Uma solução é $y_1(t) = e^t$, que de facto é até igual à própria primeira derivada. Outra solução é $y_1(t) = e^{-t}$.

Pelo Princípio da Sobreposição

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Tentemos agora descobrir a forma da solução desta equação diferencial que obedece às condições iniciais $y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$:

$$2 = y(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2 \qquad \text{e} \qquad -1 = y'(0) = \big[c_1e^t - c_2e^{-t}\big]\Big|_{t=0} = c_1 - c_2$$

obtivémos então o sistema de equações:

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ -1 = c_1 - c_2 \end{cases} \qquad \text{com solução} \qquad c_1 = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{3}{2}$$

Então no caso geral

$$ay'' + by' + cy = 0$$

esperamos que haja soluções da forma:

$$y(t) = e^{rt}$$

Introduzindo esta candidata a solução na equação obtemos:

$$0 = a\big(e^{rt}\big)'' + b\big(e^{rt}\big)' + ce^{rt} = ar^2e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = \big(ar^2 + br + c\big)e^{rt}$$

e portanto

$$ar^2 + br + c = 0$$

que é chamada a **equação característica** da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$.

A equação

$$ar^2 + br + c = 0$$

tem duas soluções reais distintas (caso discriminante positivo: $b^2 - 4ac > 0$); duas soluções repetidas (iguais, (caso discriminante nulo: $b^2 - 4ac = 0$)), ou duas soluções complexas (conjugadas uma da outra, (caso discriminante negativo: $b^2 - 4ac < 0$)).

Consideramos agora o caso "reais e distintas" e denotemos as raizes da equação característica por r_1 e r_2.

Temos então as soluções:

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

e, pelo Princípio da Sobreposição,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

tambem será solução.

Suponhamos que à equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$ associamos as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y'_0$$

Será que haverá uma solução para este PVI da forma $c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$?

Para isso, deveremos ter

$$y_0 = y(t_0) = c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} \qquad \text{e} \qquad y'_0 = y'(t_0) = c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0}$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

e recordando a regra de Cramer da Álgebra Linear o determinante da mariz dos coeficientes deve ser não nulo para termos uma solução única para este problema e como

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{vmatrix} = e^{r_1 t_0} \cdot r_2 e^{r_2 t_0} - e^{r_2 t_0} \cdot r_1 e^{r_1 t_0} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 + r_2) t_0} \neq 0 \quad \text{(porque as raizes são distintas)}$$

então existe um único par ordenado (c_1, c_2) tal que

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

é solução do PVI

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{com} \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y'_0$$

Nestas circunstâncias, $y_t = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ é dita a solução geral do PVI acima. Para além disso

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \qquad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{vmatrix} \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} y_0 & e^{r_2 t_0} \\ y'_0 & r_2 e^{r_2 t_0} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} e^{r_1 t_0} & y_0 \\ r_1 e^{r_1 t_0} & y'_0 \end{vmatrix}$$

(cf. Regra de Cramer).

2.1 Wronskianos e soluções fundamentais

Até agora resolvemos a questao de encontrar **a** solução de um PVI sobre uma equação diferencial de 2a. ordem, linear, homogenea, de coeficientes constantes e com o discriminante estritamente positivo.

Por outro lado, o determinante

$$\begin{vmatrix} e^{r_1 t_0} & e^{r_2 t_0} \\ r_1 e^{r_1 t_0} & r_2 e^{r_2 t_0} \end{vmatrix}$$

é dito o WRONSKIANO das funções $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$, calculado no ponto t_0, notação, $W[y_1, y_2](t_0)$.

De um modo geral define-se o WRONSKIANO de duas funções f e g num ponto t, $W[f, g](t)$, como o determinante da matriz cuja primeira coluna é formada pela função f e sua derivada e cuja segunda coluna é formada pela função g e sua derivada conforme indicado:

$$W[f, g](t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

Mostramos agora que, dada uma equação diferencial de 2a. ordem, linear e homogenea,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad\qquad p \text{ e } q \text{ contínuas}$$

se o Wronskiano destas duas soluções for não nulo em t_0 então qualquer PVI sobre essa equação tem por solução uma combinação linear dessas soluções, com uma escolha única dos coeficientes para cada um destes PVI.

Exercício: Reformule a afirmação acima para equações diferenciais de 3a. ordem lineares e homogeneas. E para ordem n.

De facto, dadas as soluções y_1, y_2 com $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$, então dadas as condições iniciais:

$$y(t_0) = y_0 \qquad\qquad y'(t_0) = y_0'$$

tentamos obter uma combinação linear de y_1 e y_2 que seja solução deste PVI:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_0' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

e como, por hipotese, o Wronskiano de y_1 e y_2 em t_0 é não nulo:

$$W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$$

então os coeficientes c_1 e c_2 são únicos:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_0' & y_2'(t_0) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2](t_0)} \qquad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y_2'(t_0) & y_0' \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2](t_0)}$$

Mas, mais do que isso, se o Wronskiano das soluções for não nulo num ponto t_1 então, dado um PVI sobre a equação diferencial com condição inicial em t_0, existe uma combinação linear dessas soluções que satisfaz esse PVI. Mais precisamente:

Proposição 2.2 *Sejam y_1 e y_2 soluções de*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

tal que $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$, onde t_0 é um ponto do intervalo onde p e q sšo contínuas. Então,

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

é solução geral de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

Dem: Seja ϕ uma solução qualquer de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Vamos mostrar que

$$\phi(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

para alguma escolha de c_1 e c_2. Faça-se

$$y_0 = \phi(t_0) \qquad y_0' = \phi'(t_0)$$

e considere-se o PVI:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad y(t_0) = y_0 \qquad y'(t_0) = y_0'$$

ϕ é soluçã deste PVI.

Por outro lado, como $W[y_1, y_2](t_0) \neq 0$, pelo resultado anterior, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$y(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

MAs pelo Teorema de existência e unicidade de solução destes PVI, estas soluções são iguais:

$$phi(t) = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Como ϕ era uma solução qualquer, o resultado fica demonstrado. ■

Estes pares de soluções cujo Wronskiano é não nulo dizem-se soluções fundamentais. Ainda não provámos a existência de tais soluções:

Proposição 2.3 *Considere a equação diferencial*

$$(*) \qquad y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

com p e q contínuas sobre um intervalo aberto I. Escolha $t_0 \in I$.

Seja y_1 a solução de $(*)$ que satisfaz $y(t_0) = 1$, $y'(t_0) = 0$.

Seja y_2 a solução de $(*)$ que satisfaz $y(t_0) = 0$, $y'(t_0) = 1$.

y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções d $(*)$.

Dem: y_1 e y_2 têm de existir pelo Teorema de Existência e Unicidade. Por outro lado:

$$W[y_1, y_2](t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

■

Chamamos a este o conjunto de soluções muito fundamentais de $(*)$.

Qual é o conjunto de soluções muito fundamentais de

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \text{com} \quad b^2 - 4ac > 0?$$

2.2 Independência Linear e Wronskiano

Duas funções, f e g, definidas sobre um intervalo I, dizem-se **linearmente dependentes** se existirem constantes k_1 e k_2 não simultâneamente nulas tais que

$$k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0 \qquad \text{para todo o } t \in I$$

Caso contrário são ditas linearmente independentes.

Exemplos:

1.

$$f(t) = \sin t \qquad g(t) = \cos(t - \pi/2)$$

Tem-se

$$0 = k_1 \sin t + k_2 \cos(t - \pi/2) \qquad \text{com } k_1 = 1 \quad k_2 = -1$$

2.

$$f(t) = e^t \qquad g(t) = e^{2t} \quad \text{são linearmente independentes (exercício)}$$

Eis a relação entre independência linear e Wronskiano:

Proposição 2.4 *Se f e g são diferenciáveis sobre algum intervalo aberto I e $t_0 \in I$.*

1. *Se $W[f,g](t_0) \neq 0$, então f e g são linearmente independentes.*
2. *Se f e g são linearmente dependentes, então $W[f,g](t_0) = 0$.*

Dem: Considere a expressão $k_1 f(t) + k_2 g(t) = 0$, para todo o $t \in I$. Para $t = t_0$:

$$\begin{cases} k_1 f(t_0) + k_2 g(t_0) = 0 \\ k_1 f'(t_0) + k_2 g'(t_0) = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} f(t_0) & g(t_0) \\ f'(t_0) & g'(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e como $W[f,g](t_0) \neq 0$ então, pela regra de Cramer, a solução única é

$$k_1 = k_2 = 0$$

ou seja, f e g são linearmente independentes.

■

Existem funções linearmente independentes com Wronskiano nulo.

Teorema 2.1 (Abel) *Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial*

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad \textit{com } p \textit{ e } q \textit{ contínuas sobre intervalo aberto } I$$

então

$$W[y_1, y_2](t) = ce^{-\mathbf{P}p(t)} \qquad \textit{onde } c \textit{ é constante para cada } (y_1, y_2)$$

Em particular,

$W[y_1, y_2](t) \equiv 0$ *caso* $c = 0$ *ou* $W[y_1, y_2](t) \neq o$ *qualquer que seja* $t \in I$ *caso* $c \neq 0$

Dem:

$$\begin{cases} 0 = y_1\big(y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2\big) = y_1 y_2'' + p(t)y_1 y_2' + q(t)y_1 y_2 \\ 0 = y_2\big(y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1\big) = y_2 y_1'' + p(t)y_2 y_1' + q(t)y_2 y_1 \end{cases}$$

e subtraindo a de baixo à de cima:

$$y_1 y_2'' - y_2 y_1'' + p(t)\big(y_1 y_2' - y_2 y_1'\big) + q(t)\big(y_1 y_2 - y_2 y_1\big) = 0$$

e notando que

$$W[y_1, y_2] = y_1 y_2' - y_2 y_1'$$

e que

$$W[y_1, y_2]' = y_1 y_2'' - y_2 y_1''$$

a equação acima fica:

$$W[y_1, y_2]' + p(t)W[y_1, y_2] = 0$$

que já sabemos integrar, obtendo:

$$W[y_1, y_2](t) = ce^{-\mathbf{P}p(t)}$$

■

Corolário 2.1 *Sejam y_1, y_2 soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ (p e q contínuas num intervalo aberto I).*

y_1, y_2 linearmente independentes é equivalente a dizer que o Wronskiano de y_1, y_2 nunca se anula sobre I.

■

3 Equações diferenciais de 2a. ordem lineares, homogeneas e de coeficientes constantes - 2a. parte

Retomamos o estudo das equações diferenciais de 2a. ordem lineares homogeneas e de coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Recordamos rapidamente que a equação característica desta equação é

$$ar^2 + br + c = 0$$

e que as soluções r desta equação dão origem às soluções

$$y_r(t) = e^{rt}$$

Atrás estudámos o caso em que o discriminante, $b^2 - 4ac$ é estritamente positiva em cujo caso a equação característica tem duas soluções reais distintas e as soluções da equaçãio diferencial construídas com estas raizes constituem um conjunto de soluções fundamentais.

Falta-nos, portanto, estudar os casos em que o discriminante é estritamente negativo e em que o discriminante é nulo.

3.1 Discriminante estritamente negativo, $b^2 - 4ac < 0$

Neste caso a equação característica

$$0 = ar^2 + br + c$$

tem soluções

$$r_\pm = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \lambda \pm i\mu$$

com as identificações óbvias:

$$\lambda = -\frac{b}{2a} \pm \qquad \text{e} \qquad \mu = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

e de acordo com os cálculos já feitos teremos soluções de $ay'' + by' + cy = 0$ da forma:

$$\begin{cases} y_+(t) = e^{(\lambda + i\mu)t} = e^{\lambda t}\cos\mu t + ie^{\lambda t}\sin\mu t \\ \\ y_-(t) = e^{(\lambda - i\mu)t} = e^{\lambda t}\cos\mu t - ie^{\lambda t}\sin\mu t \end{cases}$$

e somando (respectivamente, subtraindo) e dividindo por 2 (respectivamente, por $2i$), obtemos, graças ao Princípio de Sobreposição, as novas soluções:

$$\begin{cases} u(t) = \dfrac{y_+(t) + y_-(t)}{2} = e^{\lambda t}\cos\mu t \\ \\ v(t) = \dfrac{y_+(t) - y_-(t)}{2i} = e^{\lambda t}\sin\mu t \end{cases}$$

Falta, agora, garantir que estas duas soluções formam um conjunto de soluções fundamentais da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Para isso calculamos o Wronskiano destas funções, u e v:

$$W[u,v](t) = \begin{vmatrix} e^{\lambda t}\cos\mu t & e^{\lambda t}\sin\mu t \\ \lambda e^{\lambda t}\cos\mu t - e^{\lambda t}\mu\sin\mu t & \lambda e^{\lambda t}\sin\mu t + e^{\lambda t}\mu\cos\mu t \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2\lambda t}\big(\lambda\cos\mu t\sin\mu t + \mu\cos^2\mu t\big) - e^{2\lambda t}\big(-\lambda\sin\mu t\cos\mu t + \mu\sin^2\mu t\big) \qquad = \mu e^{2\lambda t} \neq 0$$

porque $\mu \neq 0$. Fica então garantido que estas duas soluções u e v constituem um conjunto de soluções fundamentais e é esta o conjunto de soluções com que trabalharemos no contexto das equações $ay'' + by' + cy = 0$ com discriminante estritamente negativo.

3.2 Discriminante nulo, $b^2 - 4ac = 0$

Neste caso a equação característica

$$0 = ar^2 + br + c$$

tem só a solução

$$r_\pm = -\frac{b}{2a}$$

portanto, usando a argumentação anterior, podemos escrever só a solução

$$y_1(t) = e^{-bt/(2a)}$$

Utilizando uma tecnica de d'Alembert, procuramos uma solução do tipo

$$y_2(t) = u(t)y_1(t) = u(t)e^{-bt/(2a)}$$

em que pretendemos determinar a função u para depois escrever y_2. Forçamos, então, $u(t)e^{-bt/(2a)}$ a ser solução da equação, isto é:

$$\begin{aligned}
0 &= a\big(u(t)e^{-bt/(2a)}\big)'' + b\big(u(t)e^{-bt/(2a)}\big)' + c\big(u(t)e^{-bt/(2a)}\big) = \\
&= a\Big(u'(t)e^{-bt/(2a)} - \frac{b}{2a}u(t)e^{-bt/(2a)}\Big)' + b\Big(u'(t)e^{-bt/(2a)} - \frac{b}{2a}u(t)e^{-bt/(2a)}\Big) + c\big(u(t)e^{-bt/(2a)}\big) = \\
&= a\left[u''(t)e^{-bt/(2a)} - \frac{b}{2a}u'(t)e^{-bt/(2a)} - \frac{b}{2a}u'(t)e^{-bt/(2a)} + \frac{b^2}{4a^2}u(t)e^{-bt/(2a)}\right] + \\
&\quad + b\left[u'(t)e^{-bt/(2a)} - \frac{b}{2a}u(t)e^{-bt/(2a)}\right] + c\left[u(t)e^{-bt/(2a)}\right] = \\
&= e^{-bt/(2a)}\left[au''(t) + \left(-\frac{b}{2} - \frac{b}{2} + b\right)u'(t) + \left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2} + c\right)u(t)\right] = \qquad \text{(e porque } b^2 - 4ac = 0) \\
&= e^{-bt/(2a)}\left[au''(t) + 0 \cdot u'(t) + (c - 2c + c)u(t)\right] = e^{-bt/(2a)}au''(t)
\end{aligned}$$

donde

$$0 = e^{-bt/(2a)}au''(t) \iff u''(t) = 0 \iff u'(t) = c_1 \iff u(t) = c_1 t + c_2$$

Então, a nova solução seria:

$$y_2(t) = u(t)y_1(t) = (c_1 t + c_2)e^{-bt/(2a)} = c_1 t e^{-bt/(2a)} + c_2 e^{-bt/(2a)}$$

mas na segunda parcela reconhecemos um multiplo escalar de y_1 e sendo a equação diferencial em causa linear e homogenea sabemos que vale o princípio da sobreposição. Então, escolhemos para segunda solução

$$y_2(t) = te^{-bt/(2a)}$$

Falta agora verificar que estas duas soluções constituem um conjunto de soluções fundamentais:

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} e^{-bt/(2a)} & te^{-bt/(2a)} \\ -\frac{b}{2a}e^{-bt/(2a)} & e^{-bt/(2a)} - \frac{b}{2a}te^{-bt/(2a)} \end{vmatrix} = e^{-bt/a} - \frac{b}{2a}te^{-bt/a} + \frac{b}{2a}te^{-bt/a} = e^{-bt/a} \neq 0$$

3.2.1 Método da redução de ordem

É interessante notar que este método funciona para a classe, mais geral, de equações diferenciais de segunda ordem lineares e homogeneas:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

De facto, suponhamos que conhecemos uma solução $y_1(t)$ e procuremos uma segunda solução da forma

$$y_2(t) = u(t)y_1(t)$$

onde u é, por ora, uma função a determinar. Introduzimos esta candidata a solução na equação diferencial, esperando que daíadvenham condições que ajudem a definir u:

$$\begin{aligned}0 &= \big[u(t)y_1(t)\big]'' + p(t)\big[u(t)y_1(t)\big]' + q(t)\big[u(t)y_1(t)\big] = \\ &= \big[u'(t)y_1(t) + u(t)y_1'(t)\big]' + p(t)\big[u'(t)y_1(t) + u(t)y_1'(t)\big] + q(t)\big[u(t)y_1(t)\big] = \\ &= \big[u''(t)y_1(t) + u'(t)y_1'(t) + u'(t)y_1'(t) + u(t)y_1''(t)\big] + p(t)\big[u'(t)y_1(t) + u(t)y_1'(t)\big] + q(t)\big[u(t)y_1(t)\big] = \\ &= y_1(t)u''(t) + \big[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)\big]u'(t) + \big[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)\big]u(t) = \\ &= y_1(t)u''(t) + \big[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)\big]u'(t)\end{aligned}$$

ou seja

$$0 = y_1(t)u''(t) + \big[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)\big]u'(t)$$

que é afinal uma equação diferencial de 1a. ordem na função incognita u' - daío nome de método de redução de ordem. u' pode posteriormente ser primitivado para se obter u.

Exercício:

Encontrar uma segunda solução de

$$2t^2y'' + 3ty' - y = 0 \qquad t > 0$$

dado que $y_1(t) = t^{-1}$ é uma solução.

Considere-se a candidata a solução:

$$y_2(t) = u(t)t^{-1}$$

cujas derivadas se escrevem:

$$y_2'(t) = \big[u(t)t^{-1}\big]' = u'(t)t^{-1} - u(t)t^{-2}$$

$$y_2''(t) = \big[u'(t)t^{-1} - u(t)t^{-2}\big]' = u''(t)t^{-1} - u'(t)t^{-2} - u'(t)t^{-2} + 2u(t)t^{-3}$$

e portanto

$$\begin{aligned}0 &= 2t^2y_2'' + 3ty_2' - y_2 = \\ &= 2t^2\big[u''(t)t^{-1} - u'(t)t^{-2} - u'(t)t^{-2} + 2u(t)t^{-3}\big] + 3t\big[u'(t)t^{-1} - u(t)t^{-2}\big] - \big[u(t)t^{-1}\big] = \\ &= 2tu'' + \big[-4 + 3\big]u'(t) + \big[4 - 3 - 1\big]t^{-1}u(t) = 2tu'' - u'(t)\end{aligned}$$

donde

$$0 = 2tu'' - u'(t)$$

e fazendo $v(t) = u'(t)$ vem:

$$2tv' = v \quad \leftrightarrow \quad \frac{v'}{v} = \frac{1}{2t} \quad \leftrightarrow \quad \ln v = \frac{1}{2}\ln t + k \quad \leftrightarrow \quad v(t) = Kt^{1/2}$$

donde

$$u(t) = \mathbf{P}Kt^{1/2} = Kt^{3/2} + K'$$

donde a segunda solução será

$$y_2(t) = t^{1/2}$$

que, sendo linearmente independente de t^{-1}, torna-as um conjunto de soluções fundamentais de $2t^2y'' + 3ty' - y = 0 \qquad t > 0$.

4 Equações lineares de 2a. ordem não homogeneas

Consideremos novamente a equação

$$(*) \qquad y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

com p, q e g contínuas sobre um intervalo I e com g não idênticamente nula.

Como já vimos, qualquer PVI sobre este tipo de equações tem uma solução única. Para além disso:

Proposição 4.1 *Sejam Y_1 e Y_2 duas soluções de $(*)$. Então,*

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

onde y_1 e y_2 são soluções da equação homogenea associada:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

e onde c_1 e c_2 são constantes apropriadas.

Dem: Como $(*)$ é linear, então

$$\big(Y_1 - Y_2\big)'' + p(t)\big(Y_1 - Y_2\big)' + q(t)\big(Y_1 - Y_2\big) = Y_1'' + p(t)Y_1' + q(t)Y_1 - \big(Y_2'' + p(t)Y_2' + q(t)Y_2\big) = g(t) - g(t) = 0$$

donde $Y_1 - Y_2$ é solução da equação homogenea associada $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$.

Sendo uma certa solução, ela obedece uma condição inicial, por exemplo:

$$\big(Y_1 - Y_2\big)(t_0) = y_0 \qquad\qquad \big(Y_1 - Y_2\big)'(t_0) = y_0'$$

Então, sendo y_1 e y_2 são soluções da equação homogenea associada, existem constantes c_1 e c_2 tais que

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

■

Em consequência,

Proposição 4.2 *A solução geral da equação $(*)$ é:*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

onde

- *c_1 e c_2 são constantes*
- *y_1 e y_2 formam um conjunto de soluções fundamentais da solução da equação homogenea associada*
- *y_p é uma solução particular de $(*)$*

Dem: A solução de um PVI sobre uma equação do tipo $(*)$ existe e é única. Consideremos então dois PVI sobre $(*)$:

$$(1) \quad \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_0' \end{cases} \qquad\qquad (2) \quad \begin{cases} y(t_1) = y_1 \\ y'(t_1) = y_1' \end{cases}$$

Chamemos Y à solução de (1) e y_p à solução de (2). Pela Proposição anterior

$$Y(t) - y_p(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

donde

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

Portanto, qualquer PVI sobre $(*)$ tem solução dada por

$$Y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + y_p(t)$$

■

4.1 Método dos Coeficientes Indeterminados

Pelo método dos coeficientes indeterminados, a função $g(t)$ sugere-nos uma solução particular da equação não homogenea. Somando-lhe a solução geral da equação homogenea associada obtemos a solução geral de $(*)$. Este método não funciona para todas as funções g mas de qualquer forma ele contempla uma classe suficientemente interessante de g's. Vejamos um exemplo:

Encontrar uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$$

Como a função exponencial se replica através da derivação, é verosímil procurar uma solução do tipo

$$y(t) = Ae^{2t}$$

Testemos então tal função:

$$3e^{2t} = \left(Ae^{2t}\right)'' - 3\left(Ae^{2t}\right)' - 4\left(Ae^{2t}\right) = 4Ae^{2t} - 6Ae^{2t} - 4Ae^{2t} = e^{2t}(4A - 6A - 4A) = -6Ae^{2t}$$

donde

$$A = -\frac{1}{2}$$

e portanto uma solução particular de $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t}$ é

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

Outro exemplo:

Encontrar uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2\sin t$$

Poderíamos começar por supor que uma solução do tipo $y(t) = A\sin t$ seria verosímil mas o facto de a equação diferencial envolver a primeira derivada da função incognita leva-nos a descartar tal possibilidade e a tentar a solução

$$y(t) = A\sin t + B\cos t$$

Assim:

$$\begin{aligned}
2\sin t &= \left(A\sin t + B\cos t\right)'' - 3\left(A\sin t + B\cos t\right)' - 4\left(A\sin t + B\cos t\right) = \\
&= -A\sin t - B\cos t - 3A\cos t + 3B\sin t - 4A\sin t - 4B\cos t = \\
&= \left(-A + 3B - 4A\right)\sin t + \left(-B - 3A - 4A\right)\cos t
\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{cases} -5A + 3B = 2 \\ -3A - 5B = 0 \end{cases} \qquad \text{e portanto} \qquad \begin{cases} A = -5/17 \\ B = 3/17 \end{cases}$$

Uma solução particular é

$$y_p(t) = -\frac{5}{17}\sin t + \frac{3}{17}\cos t$$

Outro exemplo:

Calcular uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 4t^2 - 1$$

Tentar uma solução do tipo

$$y(t) = At^2 + Bt + C$$

$$\begin{aligned}4t^2-1 &= \big(At^2+Bt+C\big)''-3\big(At^2+Bt+C\big)'-4\big(At^2+Bt+C\big)=\\&=2A-6At-3B-4At^2-4Bt-4C=t^2(-4A)+t(-6A-4B)+(2A-3B-4C)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases}4=-4A\\0=-6A-4B\\-1=2A-3B-4C\end{cases}\qquad \text{donde}\qquad \begin{cases}A=-1\\B=3/2\\C=-11/8\end{cases}$$

e portanto a solução particular é

$$y(t)=-t^2+\frac{3}{2}t-\frac{11}{8}$$

Calcular uma solução particular de

$$y''-3y'-4y=-8e^t\cos 2t$$

Testamos uma solução do tipo:

$$e^t\big(A\cos 2t+B\sin 2t\big)$$

$$\begin{aligned}-8e^t\cos 2t &= \Big(e^t\big(A\cos 2t+B\sin 2t\big)\Big)''-3\Big(e^t\big(A\cos 2t+B\sin 2t\big)\Big)'-4\Big(e^t\big(A\cos 2t+B\sin 2t\big)\Big)=\\&=\Big(e^t\big(A\cos 2t+B\sin 2t\big)+e^t\big(-2A\sin 2t+2B\cos 2t\big)\Big)'\\&-3\Big(e^t\big(A\cos 2t+B\sin 2t\big)+e^t\big(-2A\sin 2t+2B\cos 2t\big)\Big)-4\Big(e^t\big(A\cos 2t+B\sin 2t\big)\Big)=\\&=\Big(e^t\big((A+2B)\cos 2t+(B-2A)\sin 2t\big)\Big)'\\&-3\Big(e^t\big((A+2B)\cos 2t+(B-2A)\sin 2t\big)\Big)-4\Big(e^t\big(A\cos 2t+B\sin 2t\big)\Big)=\\&=\Big(e^t\big((A+2B)\cos 2t+(B-2A)\sin 2t\big)+e^t\big(-2(A+2B)\sin 2t+2(B-2A)\cos 2t\big)\Big)\\&+e^t\cos 2t\,\big(-3(A+2B)-4A\big)+e^t\sin 2t\,\big(-3(B-2A)-4B\big)=\\&=e^t\cos 2t\,\big((A+2B)+2(B-2A)-3(A+2B)-4A\big)+\\&+e^t\sin 2t\,\big((B-2A)-2(A+2B)-3(B-2A)-4B\big)=\\&=e^t\cos 2t\,\big(-10A-2B\big)+e^t\sin 2t\,\big(2A-10B\big)\end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases}-8=-10A-2B\\0=2A-10B\end{cases}\qquad \text{donde}\qquad \begin{cases}A=10/13\\B=2/13\end{cases}$$

e portanto:

$$y_p(t)=\frac{10}{13}e^t\cos 2t+\frac{2}{13}e^t\sin 2t$$

Calcular uma solução particular de

$$y''-3y'-4y=3e^{2t}+2\sin t-8e^t\cos 2t$$

Nestas circunstâncias imaginamos três (ou tantas quantas forem as parcelas do termo não homogeneo g) equações:

$$y''-3y'-4y=3e^{2t}\qquad\qquad y''-3y'-4y=2\sin t\qquad\qquad y''-3y'-4y=-8e^t\cos 2t$$

$g_i(t)$	$y_p^i(t)$
$P_n(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$	$t^s\big(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n\big)$
$P_n(t)e^{\alpha t}$	$t^s\big(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n\big)e^{\alpha t}$
$P_n(t)e^{\alpha t}\cos\beta t$ ou $P_n(t)e^{\alpha t}\sin\beta t$	$t^s\Big[\big(A_0 + \cdots + A_n t^n\big)e^{\alpha t}\cos\beta t + \big(B_0 + \cdots + B_n t^n\big)e^{\alpha t}\sin\beta t\Big]$

Table 4.1: Solução particular $y_p^i(t)$ de $ay'' + by' + cy = g_i(t)$

cujas soluções particulares são, respectivamente (como se calculou atrás):

$$y_p^1(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} \qquad y_p^2(t) = -\frac{5}{17}\sin t + \frac{3}{17}\cos t \qquad y_p^3(t) = \frac{10}{13}e^t\cos 2t + \frac{2}{13}e^t\sin 2t$$

e a solução particular de $y'' - 3y' - 4y = 3e^{2t} + 2\sin t - 8e^t\cos 2t$ será a soma destas três soluções particulares:

$$y_p(t) = -\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{5}{17}\sin t + \frac{3}{17}\cos t + \frac{10}{13}e^t\cos 2t + \frac{2}{13}e^t\sin 2t$$

Calcular uma solução particular de

$$y'' - 3y' - 4y = 2e^{-t}$$

Neste caso testamos uma solução do tipo $y_p(t) = Ae^{-t}$ mas esta revela-se soluçã da equação homogenea associada. De facto, a equação característica da equação homogenea associada é

$$0 = r^2 - 3r - 4 = (r-4)(r+1) \qquad \text{donde} \qquad r = 4 \quad r = -1$$

e portanto $y_p(t) = Ae^{-t}$ é solução da dita equação homogenea.

Nestes casos multiplica-se por t (às vezes por t^2) essa solução. Neste caso basta multiplicar por t. De facto, testemos a solução $y_p(t) = Ate^{-t}$:

$$\begin{aligned}
2e^{-t} &= \big(Ate^{-t}\big)'' - 3\big(Ate^{-t}\big)' - 4\big(Ate^{-t}\big) = A\big(1\cdot e^{-t} - te^{-t}\big)' - 3A\big(1\cdot e^{-t} - te^{-t}\big) - 4\big(Ate^{-t}\big) = \\
&= A\big(-e^{-t} - 1\cdot e^{-t} + te^{-t}\big) - 3\big(1\cdot e^{-t} - te^{-t}\big) - 4\big(Ate^{-t}\big) = \\
&= e^{-t}\big(-A - A - 3A\big) + te^{-t}\big(A + 3A - 4A\big) = -5Ae^{-t}
\end{aligned}$$

donde $A = -2/5$ e portanto:

$$y_p(t) = -\frac{2}{5}te^{-t}$$

Veja a Tabela 4.1 para um resumo destas situações

4.2 Método da Variação dos Parâmetros

Como dissémos atrás, o método dos coeficientes indeterminados só funciona para equações lineares com coeficientes constantes para as quais o termo não homogeneo pertence a uma classe especial de funções (cf. Tabela 4.1). Nesta Secção abordaremos um método mais abrangente contemplando as equações diferenciais lineares não necessariamente de coeficientes constantes e sem especificar o tipo de termo não homogeneo.

Em contrapartida, este método é mais complexo e exige o conhecimento prévio de soluções da equação homogenea associada cujo Wronskiano seja não-nulo. Em se tratando de uma equac cão diferencial linear com coeficientes constantes, já sabemos apresentar um par de tais soluções. Mas no caso em que a equação não é de coeficientes constantes a situação é diferente... Enfim, em posse de um tal par de funções, o método da variação dos parâmetros procura uma solução que é uma “combinação linear” destas duas soluções mas em que os coeficientes (parâmetros) **não** são constantes mas funções da variável em jogo.

Vejamos um exemplo:

Encontrar uma solução particular de

$$y'' + 4y = \frac{3}{\sin t}$$

Comecemos por observar que este termo não-homogeneo,

$$g(t) = \frac{3}{\sin t}$$

não faz parte da classe de funções contemplada pelo método dos coeficientes indeterminados o que exclui a aplicação deste método a este caso.

Pelo método da variação dos parâmetros, precisamos conhecer primeiro uma par de soluções da equação homogenea associada com Wronskiano não nulo. Consideremos então:

$$y'' + 4y = 0$$

cuja equação característica é $0 = r^2 + 4 = (r + 2i)(r - 2i)$, cujas soluções são $r_\pm = \pm 2i$, dando origem às soluções:

$$y_1(t) = \cos 2t \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = \sin 2t$$

Pelo método da variação dos parâmetros devemos agora testar uma solução do tipo:

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t) = u_1(t)\cos 2t + u_2(t)\sin 2t$$

Assim, calculemos a 2a. derivada desta candidata a solução:

$$y_p'(t) = \big(u_1(t)\cos t + u_2(t)\sin t\big)' = u_1'(t)\cos 2t + u_1(t)(-2)\sin 2t + u_2'(t)\sin 2t + u_2(t)2\cos 2t$$

e obtemos uma primeira equação para as derivadas de u_1 e u_2 fazendo

$$u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\sin 2t = 0$$

Assim, a primeira derivada de $y_p(t)$ reduz-se a

$$y_p'(t) = -2u_1(t)\sin 2t + 2u_2(t)\cos 2t$$

donde

$$y_p''(t) = \big(-2u_1(t)\sin 2t + 2u_2(t)\cos 2t\big)' = -2u_1'(t)\sin 2t - 4u_1(t)\cos 2t + 2u_2'(t)\cos 2t - 4u_2(t)\sin 2t$$

e introduzindo na equação diferencial:

$$\begin{aligned}\frac{3}{\sin t} &= -2u_1'(t)\sin 2t - 4u_1(t)\cos 2t + 2u_2'(t)\cos 2t - 4u_2(t)\sin 2t + 4\big(u_1(t)\cos 2t + u_2(t)\sin 2t\big) = \\ &= -2u_1'(t)\sin 2t + 2u_2'(t)\cos 2t\end{aligned}$$

e juntando à equação obtida atrás:

$$\begin{cases} 0 &= u_1'(t)\cos 2t + u_2'(t)\sin 2t \\ \dfrac{3}{\sin t} &= -2u_1'(t)\sin 2t + 2u_2'(t)\cos 2t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 0 \\ 3/\sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix}$$

e como o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = 2\cos^2 2t + 2\sin^2 2t = 2 \neq 0$$

como era de esperar já que as soluções da equação homogenea associada formam um conjunto de soluções fundamentais, então pela regra de Cramer:

$$u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} \qquad u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}$$

onde

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \cos 2t & \sin 2t \\ -2\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = 2\cos^2 2t + 2\sin^2 2t = 2$$

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2t \\ 3/\sin t & 2\cos 2t \end{vmatrix} = -\sin 2t \cdot 3/\sin t = -6\sin t\cos t/\sin t = -6\cos t$$

$$\Delta_2(t) = \begin{vmatrix} \cos 2t & 0 \\ -2\sin 2t & 3/\sin t \end{vmatrix} = \cos 2t \cdot 3/\sin t = 3\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\sin t} = 3\frac{1-2\sin^2 t}{\sin t} = \frac{3}{\sin t} - 6\sin t$$

e então,

$$u_1'(t) = \frac{-6\cos t}{2} = -3\cos t \qquad u_2'(t) = \frac{3}{2\sin t} - 3\sin t$$

donde

$$u_1(t) = -3\sin t + c_1 \qquad u_2(t) = \frac{3}{2}\ln|\frac{1}{\sin t} - \cot t| + 3\cos t + c_2$$

Finalmente a solução geral da equação não homogenea é:

$$\begin{aligned} y(t) &= \big(-3\sin t + c_1\big)\cos 2t + \left(\frac{3}{2}\ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| + 3\cos t + c_2\right)\sin 2t = \\ &= 3\sin t + \frac{3}{2}\sin 2t \cdot \ln\left|\frac{1}{\sin t} - \cot t\right| + c_1\cos 2t + c_2\sin 2t \end{aligned}$$

onde $c_1\cos 2t + c_2\sin 2t$ é a solução geral da equação homogenea associada.

Vejamos então o caso geral. Considere a equação

$$(*) \qquad y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

com p, q e g contínuas sobre um intervalo I e com g não idênticamente nula.

Suponhamos que conhecemos duas soluções da equação homogenea associada, $y_1(t)$ e $y_2(t)$. Testamos então a função:

$$u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$$

onde $u_1(t)$ e $u_2(t)$ são por ora funções desconhecidas e é nosso objectivo imediato determiná-las. Introduzimos então esta função na equação diferencial e forçamo-la a ser uma solução:

$$g(t) = \big(u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)\big)'' + p(t)\big(u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)\big)' + q(t)\big(u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)\big)'$$

Comecemos por determinar as derivadas de $u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$:

$$\big(u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)\big)' = u_1'(t)y_1(t) + u_1(t)y_1'(t) + u_2'(t)y_2(t) + u_2(t)y_2'(t)$$

e tal como acima façamos a "simplificação":

$$0 = u_1'(t)y_1(t) + u_2'(t)y_2(t) \qquad (**)$$

e guardemos esta equação. Agora a derivada tem uma expressão mais simples que é:

$$\big(u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)\big)' = u_1(t)y_1'(t)+u_2(t)y_2'(t)$$

e portanto:

$$\begin{aligned}\big(u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)\big)'' &= \big(u_1(t)y_1'(t)+u_2(t)y_2'(t)\big)' = \\ &= u_1'(t)y_1'(t)+u_1(t)y_1''(t)+u_2'(t)y_2'(t)+u_2(t)y_2''(t)\end{aligned}$$

Introduzindo na equação diferencial:

$$\begin{aligned}g(t) &= u_1'(t)y_1'(t)+u_1(t)y_1''(t)+u_2'(t)y_2'(t)+u_2(t)y_2''(t)+ \\ &\quad + p(t)\Big(u_1(t)y_1'(t)+u_2(t)y_2'(t)\Big)+q(t)\Big(u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)\Big) = \\ &= u_1'(t)y_1'(t)+u_2'(t)y_2'(t)+u_1\Big[y_1''(t)+p(t)y_1'(t)+q(t)y_1(t)\Big]+u_2\Big[y_2''(t)+p(t)y_2'(t)+q(t)y_2(t)\Big] = \\ &= u_1'(t)y_1'(t)+u_2'(t)y_2'(t)+u_1\cdot 0+u_2\cdot 0 = u_1'(t)y_1'(t)+u_2'(t)y_2'(t)\end{aligned}$$

e juntandoà equação $(**)$ obtemos o sistema:

$$\begin{pmatrix}0\\ g(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'(t)\\ u_2'(t)\end{pmatrix}$$

Como as soluções da equação homogenea associada constituem por hipotese um conjunto fundamental de soluções, então:

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix}y_1(t) & y_2(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t)\end{vmatrix} \neq 0$$

Portanto, este sistema tem solução única dada por

$$u_1'(t) = \frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} \qquad u_2'(t) = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}$$

onde

$$\Delta_1(t) = \begin{vmatrix}0 & y_2(t)\\ g(t) & y_2'(t)\end{vmatrix} \qquad \Delta_2(t) = \begin{vmatrix}y_1(t) & 0\\ y_1'(t) & g(t)\end{vmatrix}$$

Prosseguindo,

$$u_1(t) = \mathbf{P}\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)} \qquad u_2(t) = \mathbf{P}\frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}$$

e finalmente a solução geral é dada por:

$$y(t) = \left[\mathbf{P}\frac{\Delta_1(t)}{\Delta(t)}\right]y_1(t)+\left[\mathbf{P}\frac{\Delta_2(t)}{\Delta(t)}\right]y_2(t)+c_1(t)y_1(t)+c_2(t)y_2(t)$$

5 Transformada de Laplace

Dada uma função $f=f(t)$, a sua transformada de Laplace (notação: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$), é uma função da variável s dada por

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}f(t)dt$$

quando este integral existe (conforme já foi discutido quando falámos de integrais impróprios).

Comecemos então por determinar uma classe de funções para as quais existe transformada de Laplace.

Proposição 5.1 *Suponha que:*

1. *f é contínua por troços no intervalo $[0,A]$, para todo o $A>0$;*

2. $|f(t)| \leq Ke^{at}$ *para* $t \geq M$

(para certas constantes reais K, a e M com $k > 0$ e $M > 0$). Então a transformada de Laplace existe para $s > a$.

Dem:

1. Se f é contínua por troços no intervalo $[0, A]$ para todo o $A > 0$, então f é integrável emm qualquer intervalo $[0, A]$

2. $$\int_0^{+\infty} |e^{-st} f(t)| dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-st} K e^{at} dt \leq K \int_0^{+\infty} e^{-(s-a)t} dt = K \int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^{-(s-a)t}}$$
   que converge sempre que $s > a$.

■

Uma função que satisfaz 2. acima diz-se de **ordem exponencial** quando t tende para infinito. Designamos então as funções descritas nesta proposi¸cão de funções contínuas por troços e de ordem exponencial quando t tende para infinito. No âmbito da transformada de Laplace, trabalharemos quase sempre com estas funções excepto quando indicado.

Exemplos de transformadas de Laplace:

1. $f(t) = 1, t \geq 0$
   $$\mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \lim_{A \mapsto \infty} \int_0^A e^{-st} dt = \lim_{A \mapsto \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^A = \lim_{A \mapsto \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sA} + \frac{1}{s} \right) = \frac{1}{s}$$
   para $s > 0$;

2. $f(t) = e^{at}, t \geq 0$
   $$\mathcal{L}\{e^{at}\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt = \lim_{A \mapsto \infty} \int_0^A e^{-(s-a)t} dt = \text{ seguindo o exemplo de cima } = \frac{1}{s-a}$$
   para $s > a$;

3. $f(t) = \sin at, t \geq 0$
   $$\mathcal{L}\{\sin at\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot \sin at dt = \lim_{A \mapsto \infty} \int_0^A e^{-st} \sin at dt = \ldots$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P} e^{-st} \sin at &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sin at + \frac{1}{s} \mathbf{P} e^{-st} a \cos at = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin at + \\ &+ \frac{a}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cos at + \frac{1}{s} \mathbf{P} e^{-st} (-a) \sin at \right] = \\ &= -\frac{1}{s} e^{-st} \sin at - \frac{a}{s^2} e^{-st} \cos at - \frac{a^2}{s^2} \mathbf{P} e^{-st} \sin at \end{aligned}$$

donde $\quad (1 + \frac{a^2}{s^2}) \mathbf{P} e^{-st} \sin at = -\frac{1}{s} e^{-st} \sin at - \frac{a}{s^2} e^{-st} \cos at = -\frac{1}{s} e^{-st} \left(\sin at + \frac{a}{s} \cos at \right)$

portanto $\quad \mathbf{P} e^{-st} \sin at = -\frac{s}{s^2 + a^2} e^{-st} \left(\sin at + \frac{a}{s} e^{-st} \cos at \right) \quad$ e retomando os cálculos

$$\ldots = \lim_{A\mapsto\infty}\left[-\frac{s}{s^2+a^2}e^{-st}\left(\sin at + \frac{a}{s}e^{-st}\cos at\right)\right]_0^A =$$

$$= \lim_{A\mapsto\infty}\left(-\frac{s}{s^2+a^2}e^{-sA}\left(\sin aA + \frac{a}{s}\cos aA\right) + \frac{s}{s^2+a^2}e^{0}\left(\sin 0 + \frac{a}{s}\cos 0\right)\right) = \frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{a}{s} =$$

$$= \frac{a}{s^2+a^2}$$

isto é

$$\mathcal{L}\{\sin at\}(s) = \frac{a}{s^2+a^2}$$

Exercício: calcular

$$\mathcal{L}\{\cos at\}(s)$$

5.1 Soluções de PVI's

Comecemos por estabelecer o seguinte resultado que estabelece uma relação entre transformada de Laplace da derivada e a da função original (para certa classe de funções) que mais adiante veremos ser de muitas importância na aplicação à resolução de PVI's.

Proposição 5.2 *Supomha que f é contínua e que a sua derivada é contínua por troços num certo intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha ainda que existem constantes K, a e M tais que*

$$|f(t)| \leq Ke^{at} \qquad \textit{para } t \geq M.$$

Então existe a transformada de Laplace de f', L{ f'(t) }(s), para $s > a$, tendo-se:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)$$

Dem: Comecemos por considerar o integral $\int_0^A e^{-st}f'(t)dt$. Se f' tem pontos de descontinuidade no intervalo $0 \leq t \leq A$, sejam eles $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Valem então as seguintes igualdades:

$$\int_0^A e^{-st}f'(t)dt = \int_0^{t_1} e^{-st}f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}f'(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st}f'(t)dt =$$

$$= \left\{\left[e^{-st}f(t)\right]_0^{t_1} + s\int_0^{t_1} e^{-st}f(t)dt\right\} + \left\{\left[e^{-st}f(t)\right]_{t_1}^{t_2} + s\int_{t_1}^{t_2} e^{-st}f(t)dt\right\} + \cdots +$$

$$+ \left\{\left[e^{-st}f(t)\right]_{t_n}^{A} + s\int_{t_n}^{A} e^{-st}f(t)dt\right\} =$$

$$= \left\{\left[e^{-st}f(t)\right]_0^{t_1} + e^{-st}f(t)\Big]_{t_1}^{t_2} + \cdots + e^{-st}f(t)\Big]_{t_n}^{A}\right\} +$$

$$+ s\left\{\int_0^{t_1} e^{-st}f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st}f(t)dt + \cdots + \int_{t_n}^{A} e^{-st}f(t)dt\right\} =$$

$$+ e^{-sA}f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st}f(t)dt \underset{A\mapsto+\infty}{\longrightarrow} s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0) \qquad \text{para } s > a$$

■

Se f' e f'' satisfazem as mesmas condições que aquelas exigidas a f e a f' então a transformada de Laplace existe para f'' tendo-se:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) - f'(0) = s\Big[s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)\Big] - f'(0) = s^2\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - sf(0) - f'(0)$$

Por indução obtemos

Corolário 5.1 *Suponha que f e as suas derivadas até ordem $n-1$ são funções contínuas e que a derivada de ordem n, $f^{(n)}$ é contínua por troços num certo intervalo $0 \leq t \leq A$, para todo o $A > 0$. Então a transformada de Laplace de $f^{(n)}$ existe e*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

■

Outra propriedade da transformada de Laplace que nos vai interessar é a sua linearidade isto é, dadas duas funções f_1 e f_2 admitindo transformada de Laplace, e dadas constantes c_1 e c_2, tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{c_1f^1(t)+c_2f^2(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\Big(c_1f^1(t)+c_2f^2(t)\Big)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st}\Big(c_1f^1(t)+c_2f^2(t)\Big)dt = \\
&= \lim_{A\mapsto+\infty}\int_0^A e^{-st}\Big(c_1f^1(t)+c_2f^2(t)\Big) = \\
&= \lim_{A\mapsto+\infty}\left[c_1\int_0^A e^{-st}f^1(t)dt + c_2\int_0^A e^{-st}f^2(t)dt\right] = \\
&= c_1\lim_{A\mapsto+\infty}\int_0^A e^{-st}f^1(t)dt + c_2\lim_{A\mapsto+\infty}\int_0^A e^{-st}f^2(t)dt = \\
&= c_1\int_0^{+\infty} e^{-st}f^1(t)dt + c_2\int_0^{+\infty} e^{-st}f^2(t)dt = c_1\mathcal{L}\{f^1(t)\}(s) + c_2\mathcal{L}\{f^2(t)\}(s)
\end{aligned}$$

Vejamos então o que é possível fazer com PVI's sobre equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, homogeneas ou não:

Considere-se o PVI

$$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

Pelas técnicas que já conhecemos

$$0 = r^2 - r - 2 = (r-2)(r+1) \qquad \text{donde} \quad r = 2 \text{ ou } r = -1$$

e então a solução geral da equção diferencial é:

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-t}$$

Queremos então a solução que satisfaz:

$$1 = y(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2$$

e

$$0 = y'(0) = \Big(2c_1e^{2t} - c_2e^{-t}\Big)\Big|_{t=0} = 2c_1 - c_2$$

donde

$$c_1 = \frac{1}{3} \qquad c_2 = \frac{2}{3}$$

Finalmente, a solução do PVI é:

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

Vejamos agora o que podemos fazer com a transformada de Laplace:

Encarando $y'' - y' - 2y = 0$ como a igualdade entre duas funções, as suas transformadas de Laplace serão tambem iguais

$$\mathcal{L}\{y'' - y' - 2y\}(s) = \mathcal{L}\{0\}(s)$$

e como

$$\mathcal{L}\{0\}(s) = 0$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''-y'-2y\}(s) &= \mathcal{L}\{y''\}(s)-\mathcal{L}\{y'\}(s)-2\mathcal{L}\{y\}(s)= \\ &= s^2\mathcal{L}\{y\}(s)-sy(0)-y'(0)-s\mathcal{L}\{y\}(s)+y(0)-2\mathcal{L}\{y\}(s)= \\ &= \Big(\mathcal{L}\{y\}(s)\Big)(s^2-s-2)+s-1\end{aligned}$$

(já que as condições iniciais são $y(0)=1, y'(0)=0$), então

$$0=\Big(\mathcal{L}\{y\}(s)\Big)(s^2-s-2)-s+1$$

e portanto,

$$\mathcal{L}\{y\}(s)=\frac{s-1}{(s^2-s-2)}=\frac{s-1}{(s+1)(s-2)}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}=\dots$$

com

$$A=\left.\frac{s-1}{s-2}\right|_{s=-1}=\frac{2}{3} \qquad B=\left.\frac{s-1}{s+1}\right|_{s=2}=\frac{1}{3}$$

$$\dots=\frac{2/3}{s-(-1)}+\frac{1/3}{s-2}=\frac{2}{3}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)+\frac{1}{3}\mathcal{L}\{e^{2t}\}(s)=\mathcal{L}\left\{\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}\right\}(s)$$

donde, a solução é

$$y(t)=\frac{2}{3}e^{-t}+\frac{1}{3}e^{2t}$$

Encontre a solução do PVI

$$y''+y=\sin 2t \qquad y(0)=2, \quad y'(0)=1$$

Um pouco mais sucintamente:

$$\mathcal{L}\{y''+y\}(s)=\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s)$$

e como

$$\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s)=\frac{2}{s^2+4}$$

e

$$\mathcal{L}\{y''+y\}(s)=s^2\mathcal{L}\{y\}(s)-sy(0)-y'(0)+\mathcal{L}\{y\}(s)=s^2\mathcal{L}\{y\}(s)-2s-1+\mathcal{L}\{y\}(s)=\Big(\mathcal{L}\{y\}(s)\Big)(s^2+1)-2s-1$$

Então

$$\Big(\mathcal{L}\{y\}(s)\Big)(s^2+1)-2s-1=\frac{2}{s^2+4}$$

e portanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y\}(s)\frac{2s^3+s^2+8s+6}{(s^2+1)(s^2+4)} &= \frac{As+B}{s^2+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}=\frac{(As+B)(s^2+4)+(Cs+D)(s^2+1)}{(s^2+4)(s^2+1)}= \\ &= \frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(4A+C)s+(4B+D)}{(s^2+4)(s^2+1)}=\dots\end{aligned}$$

donde

$$A+C=2 \qquad B+D=1 \qquad 4A+C=8 \qquad 4B+D=6$$

e

$$A=2 \qquad C=0 \qquad B=5/3 \qquad D=-2/3$$

$$\cdots = \frac{2s}{s^2+1}+\frac{5/3}{s^2+1}-\frac{2/3}{s^2+4} = 2\mathcal{L}\{\cos t\}(s)+\frac{5}{3}\mathcal{L}\{\sin t\}(s)-\frac{1}{3}\mathcal{L}\{\sin 2t\}(s) = \mathcal{L}\left\{2\cos t+\frac{5}{3}\sin t-\frac{1}{3}\sin 2t\right\}(s)$$

e portanto, a solução do PVI é:

$$y(t) = 2\cos t \ + \frac{5}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t$$

Resolver o PVI:

$$y^{(4)} - y = 0 \qquad\qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \quad y''(0) = 0 \quad y'''(0) = 0$$

Sem mais comentários:

$$0 = \mathcal{L}\{0\}(s) = \mathcal{L}\{y^{(4)}-y\}(s) = s^4\mathcal{L}\{y\}(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)-\mathcal{L}\{y\}(s) = \Big(\mathcal{L}\{y\}(s)\Big)(s^4-1)-s^2$$

donde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y\}(s) &= \frac{s^2}{s^4-1} = \frac{As+B}{s^2-1}+\frac{Cs+D}{s^2+1} = \frac{(As+B)(s^2+1)+(Cs+D)(s^2-1)}{(s^2-1)(s^2+1)} = \\ &= \frac{(A+C)s^3+(B+D)s^2+(A-C)s+(B-D)}{(s^2-1)(s^2+1)} = \dots\end{aligned}$$

com

$$A+C=0 \qquad B+D=1 \qquad A-C=0 \qquad B-D=0$$

donde

$$A=0 \qquad C=0 \qquad B=1/2 \qquad D=1/2$$

e portanto

$$\begin{aligned}\dots &= \frac{1/2}{s^2-1}+\frac{1/2}{s^2+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1/2}{s-1}-\frac{1/2}{s+1}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{4}\mathcal{L}\{e^t\}(s)-\frac{1}{4}\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)+\frac{1}{2}\mathcal{L}\{\sin t\}(s) = \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin t\right\}(s)\end{aligned}$$

e finalmente, a solução do PVI é:

$$y(t) = \frac{1}{4}e^t-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{2}\sin t$$

5.2 Funções de Heaviside

A função de Heaviside:

$$u_c(t) = \begin{cases}0, & t < c\\ 1, & t \geq c\end{cases} \qquad\qquad \text{onde } c \text{ é uma constante não negativa}$$

Graficamente (ver Figura 1)
Variações (ver Figuras 2 e 3):

A transformada de Laplace da função de Heaviside:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u_c(t)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}u_c(t)dt = \int_c^{+\infty} e^{-st}dt = \lim_{A\mapsto+\infty}\int_c^A e^{-st}dt = \\ &= \lim_{A\mapsto+\infty}\Big[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big]_c^A = \lim_{A\mapsto+\infty}\Big[-\frac{1}{s}e^{-sA}+\frac{1}{s}e^{-sc}\Big]_c^A = \frac{e^{-cs}}{s}\end{aligned}$$

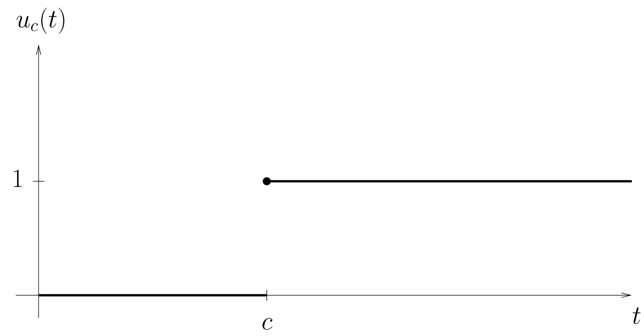

Figure 1: Função de Heaviside

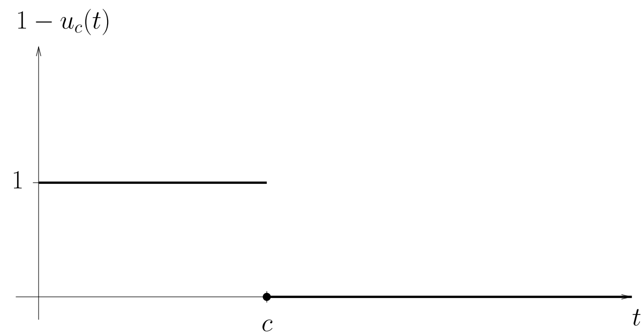

Figure 2: Função $1 - u_c(t)$

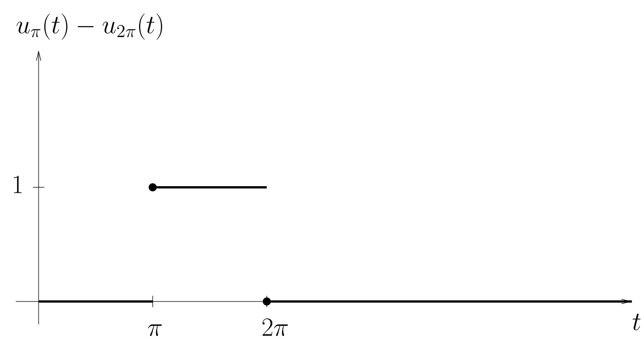

Figure 3: Função $1 - u_c(t)$

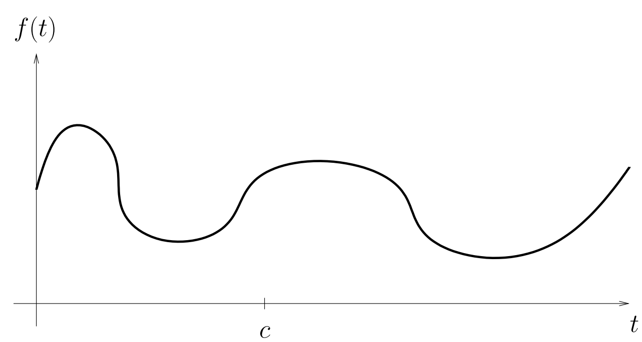

Figure 4: Função f

Outro aspecto importante da função de Heaviside é ajudar a descrever a "translação" de uma função. Dada uma função f definida para $t \geq 0$, definimos a função:

$$g(t) = \Big\{ 0, \quad t < c f(t-c), \quad t \geq c \quad = u_c f(t-c)$$

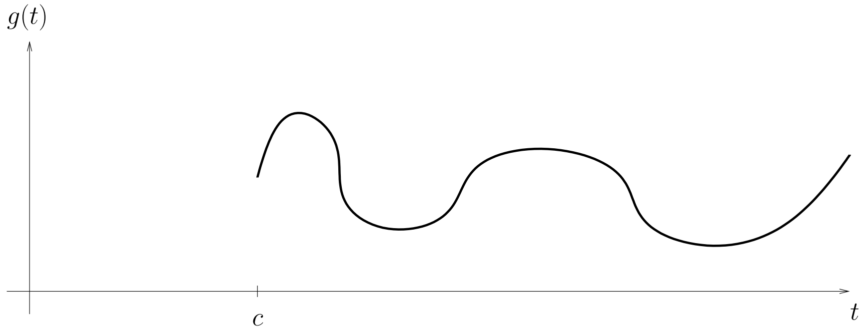

Figure 5: Função $g(t) = u_c f(t-c)$

graficamente (ver Figuras 4 e 5):

Proposição 5.3 *Se existe a transformada de Laplace de uma certa função f, digamos*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) \qquad \textit{para } s > a \geq 0$$

e c é uma constante positiva, então:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\}(s) = e^{-cs}\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = e^{-cs}F(s) \qquad \textit{para } s > a$$

e por aplicação da transformada de Laplace inversa:

$$u_c(t)f(t-c) = \mathcal{L}^{-1}\{e^{-cs}F(s)\}(t)$$

Dem: Basta calcular a transformada de Laplace de $u_c(t)f(t-c)$:

$$\mathcal{L}\{u_c(t)f(t-c)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt = \lim_{A\mapsto+\infty}\int_0^A e^{-st}u_c(t)f(t-c)dt = \lim_{A\mapsto+\infty}\int_c^A e^{-st}f(t-c)dt = \dots$$

e introduzindo a variável de integração $t' = t - c$, tem-se:

$$t = t' + c \qquad dt = dt' \qquad t = c \Rightarrow t' = 0 \qquad t = A \Rightarrow t' = A - c$$

donde

$$\dots = \lim_{A\mapsto+\infty}\int_c^{A-c} e^{-s(t'+c)}f(t')dt' = e^{-sc}\lim_{A\mapsto+\infty}\int_c^{A-c} e^{-st'}f(t')dt' = e^{-cs}\int_c^{+\infty} e^{-st'}f(t')dt' = e^{-cs}F(s)$$

■

Exemplos:

1. Calcular a transformada de Laplace de

$$f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 \geq t < \pi/4 \\ \sin t + \cos(t-\pi/4), & t \geq \pi/4 \end{cases} = \sin t + u_{\pi/4}(t)\cos(t-\pi/4)$$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t + u_{\pi/4}(t)\cos(t-\pi/4)\}(s) = \mathcal{L}\{\sin t\}(s) + \mathcal{L}\{u_{\pi/4}(t)\cos(t-\pi/4)\}(s) = \frac{1}{s^2+1} + e^{-s\pi/4}\frac{s}{s^2+1}$$

2. Calcule a transformada inversa de

$$F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1-e^{-2s}}{s^2}\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s^2}\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\{\frac{e^{-2s}}{s^2}\}(t) = t - u_2(t-2)$$

Um outro resultado importante é:

Proposição 5.4 *Se a transformada de Laplace de f existe, isto é, se, para $s > a \geq 0$, se c é constante, e*

$$F(s) = \mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\}(s)$$

então,

$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\}(s) = F(s-c) \qquad \qquad \textit{para } s > a + c$$

e aplicando a transformada de Laplace inversa:

$$e^{ct} f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s-c)\}(t)$$

Dem:

$$\mathcal{L}\{e^{ct} f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{ct} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-c)t} f(t) dt = F(s-c)$$

■

5.3 Equações diferenciais com termos não homogeneos descontínuos

Exemplos:
1.

$$2y'' + y' + 2y = g(t) \qquad \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

com

$$g(t) = u_5(t) - u_{20}(t) = \begin{cases} 1, & 5 \leq t < 20 \\ 0, & \text{nos outros pontos} \end{cases}$$

Argumentando como anteriormente, consideramos a transformada de Laplace da equação diferencial e desenvolvemos:

$$\mathcal{L}\{2y'' + y' + 2y\}(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

$$\mathcal{L}\{2y''+y'+2y\}(s) = 2\Big[s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0)\Big] + \Big[s\mathcal{L}\{y\}(s) - y(0)\Big] + 2\mathcal{L}\{y\}(s) = \Big(\mathcal{L}\{y\}(s)\Big)\big(2s^2+s+2\big)$$

e

$$\mathcal{L}\{g(t)\}(s) = \mathcal{L}\{u_5(t) - u_{20}(t)\}(s) = \mathcal{L}\{u_5(t)\}(s) - \mathcal{L}\{u_{20}(t)\}(s) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s}$$

donde

$$\Big(\mathcal{L}\{y\}(s)\Big)\big(2s^2 + s + 2\big) = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s}$$

isto é:

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)} = \frac{e^{-5s}}{s(2s^2 + s + 2)} - \frac{e^{-20s}}{s(2s^2 + s + 2)} = \big(e^{-5s}\big)H(s) + \big(e^{-20s}\big)H(s)$$

onde

$$H(s) = \frac{1}{s(2s^2 + s + 2)}$$

e portanto a solução é

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big\{\big(e^{-5s}\big)H(s) + \big(e^{-20s}\big)H(s)\big)\big\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\big\{\big(e^{-5s}\big)H(s)\big\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\big\{\big(e^{-20s}\big)H(s)\big)\big\}(t) =$$
$$= u_5(t)h(t-5) + u_{20}(t)h(t-20)$$

onde

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}(t)$$

Finalmente, só falta descobrir a inversa da transformada de Laplace de H:

$$H(s) = \frac{1}{s(2s^2+s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{2s^2+s+2} = \dots$$

então

$$A = \left.\frac{1}{2s^2+s+2}\right|_{s=0} = \frac{1}{2} \qquad 0 = A + \frac{B}{2} \qquad \frac{1}{5} = A + \frac{B+C}{5}$$

donde

$$A = \frac{1}{2} \qquad B = -1 \qquad C = -\frac{1}{2}$$

e portanto:

$$\dots = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{s+1/2}{2s^2+s+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s+1/2}{s^2+(1/2)s+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{(s+1/4)+1/4}{(s+1/4)^2+15/16} =$$
$$= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{1\}(s) - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t/4}\cos(t\sqrt{15}/4)\}(s) - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{15}}{15}\mathcal{L}\{e^{-t/4}\sin(t\sqrt{15}/4)\}(s)$$

donde

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t/4}\cos(t\sqrt{15}/4) - \frac{\sqrt{15}}{30}e^{-t/4}\sin(t\sqrt{15}/4)$$

5.4 Delta de Dirac

Define-se a função "Delta de Dirac", notação: δ, através de:

$$\delta(x) = 0 \qquad \text{para } x \neq 0 \qquad\qquad \text{e} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta x \, dx = 1$$

Esta não é portanto uma função no sentido que temos dado a esta palavra, pois sendo uma função integrável então o seu integral seria igual ao integral da função identicamente nula, isto é o seu integral valeria zero.

Podemos conceber tal "função" como o limite da seguinte colecção de funções:

$$d_\tau(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\tau}, & -\tau < t < \tau \\ 0, & \text{nos outros pontos} \end{cases}$$

Veja a Figura 6

Esta colecção de funções têm a seguinte propriedade: qualquer que seja $\tau > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d_\tau(t)dt = \int_{-\tau}^{+\tau} \frac{1}{2\tau}dt = \frac{1}{2\tau}\int_{-\tau}^{+\tau} \frac{1}{2\tau}dt = \frac{1}{2\tau} \cdot 2\tau = 1$$

Outra propriedade interessante é o facto de que qualquer que seja o $t_0 \neq 0$:

$$\lim_{\tau \mapsto 0} d_\tau(t_0) = 0$$

De facto, dado um $t_0 \neq 0$ tome-se $\tau_0 = \frac{1}{2}|t_0|$. Para este τ_0 e para outros menores que este, tem-se a seguinte situação ilustrada na Figura 7

Então, o limite desta coleção de funções tem as propriedades desejadas: o seu integral é 1 e para $t \neq 0$ o valor é 0. Desta forma "realizamos" o delta de Dirac:

$$\delta(x) = 0 \qquad \text{para } x \neq 0$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1$$

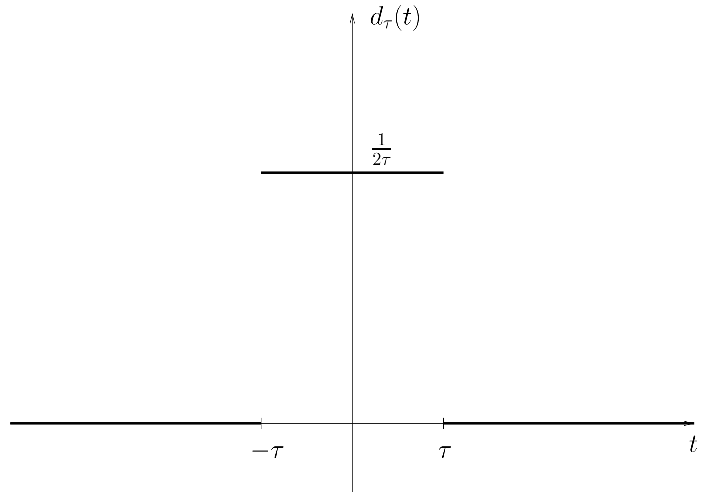

Figure 6: Função $d_\tau(t) = \frac{1}{2\tau}$

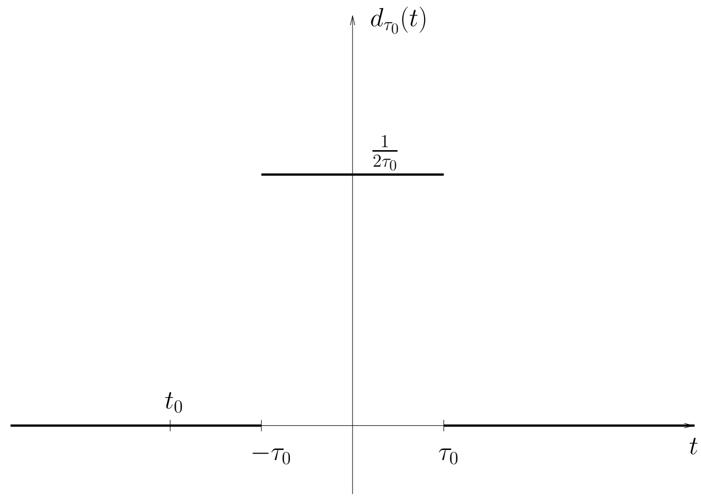

Figure 7: Ilustração de que $\lim_{\tau \mapsto 0} d_\tau(t_0) = 0$ para $t_0 \neq 0$

Observamos aqui que podemos centrar o delta de Dirac em torno de qulquer ponto para além de 0, isto é para cada x_0 real existe a "função" que é nula para $x \neq x_0$ e cujo integral sobre $\mathbb{R}$ é 1. Essa "função" é o delta de Dirac "centrado em x_0":

$$\delta(x - x_0) = 0 \qquad \text{para } x \neq x_0$$

e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0)dx = 1$$

Calculemos então a transformada de Laplace do delta de Dirac:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st}\delta(t-t_0)dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} \lim_{\tau \mapsto 0} d_\tau(t-t_0)dt = \lim_{\tau \mapsto 0} \int_0^{+\infty} e^{-st} d_\tau(t-t_0)dt = \\
&= \lim_{\tau \mapsto 0} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st} \frac{1}{2\tau} dt = \lim_{\tau \mapsto 0} \frac{1}{2\tau} \int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} e^{-st} = \lim_{\tau \mapsto 0} \frac{1}{2\tau} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t_0-\tau}^{t_0+\tau} = \\
&= \lim_{\tau \mapsto 0} \frac{1}{2\tau} \left[-\frac{1}{s} e^{-s(t_0+\tau)} + \frac{1}{s} e^{-s(t_0-\tau)} \right] = \frac{1}{s} e^{-st_0} \lim_{\tau \mapsto 0} \frac{e^{s\tau} - e^{-s\tau}}{2\tau} = \dots
\end{aligned}$$

e como

$$\lim_{\tau\mapsto 0}\frac{\left(e^{s\tau}-e^{-s\tau}\right)'}{\left(2\tau\right)'}=\lim_{\tau\mapsto 0}\frac{se^{s\tau}+se^{-s\tau}}{2}=s$$

então

$$\dots=\frac{1}{s}e^{-st_0}s=e^{-st_0}$$

ou seja

$$\mathcal{L}\{\delta(t-t_0)\}(s)=e^{-st_0}$$

que faz sentido para todo o $t_0>0$. Estendemos este resultado para $t_0=0$, tomando o limite quando $t_0\mapsto 0$, obtendo:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\}(s)=1$$

Tambem é possível calcular o integal sobre $\mathbb{R}$ do produto de um delta de Dirac por uma outra função contínua:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{\tau\mapsto 0}d_\tau(t-t_0)f(t)dt=\lim_{\tau\mapsto 0}\int_{-\infty}^{+\infty}d_\tau(t-t_0)f(t)dt=$$
$$=\lim_{\tau\mapsto 0}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}\frac{1}{2\tau}f(t)dt=\lim_{\tau\mapsto 0}\frac{1}{2\tau}\int_{t_0-\tau}^{t_0+\tau}f(t)dt=\lim_{\tau\mapsto 0}\frac{1}{2\tau}\cdot 2\tau\cdot f(t^*)dt=\dots$$

pelo Teorema do Valor Médio para integrais, com $t_0-\tau<t^*t_0+\tau$. Então, no limite quando $\tau\mapsto 0$,

$$t^*\mapsto t_0$$

e portanto

$$\dots=f(t_0)$$

ou seja,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

Exercício: Calcular a solução do PVI:

$$2y''+y'+2y=\delta(t-5)\qquad\qquad y(0)=0,\quad y'(0)=0$$

$$\mathcal{L}\{2y''+y'+2y\}(s)=\mathcal{L}\{\delta(t-5)\}(s)$$

$$\mathcal{L}\{2y''+y'+2y\}(s)=2\Big[s^2\mathcal{L}\{y\}(s)-sy(0)-sy'(0)\Big]+\Big[s\mathcal{L}\{y\}(s)-y(0)\Big]+2\Big[\mathcal{L}\{y\}(s)\Big]=$$
$$=\Big[\mathcal{L}\{y\}(s)\Big]\Big(2s^2+s+2\Big)=$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t-5)\}(s)=e^{-5s}$$

$$\Big[\mathcal{L}\{y\}(s)\Big]\Big(2s^2+s+2\Big)=e^{-5s}$$

donde

$$\mathcal{L}\{y\}(s)=\frac{e^{-5s}}{2s^2+s+2}=\frac{e^{-5s}}{2}\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}$$

e como

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right\}(t) = \frac{4}{\sqrt{15}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{(s+\frac{1}{4})^2+\frac{15}{16}}\right\}(t) = \frac{4}{\sqrt{15}}e^{-t/4}\sin t\frac{\sqrt{15}}{4}$$

portanto

$$y(t) = \frac{2}{\sqrt{15}}u_5(t)e^{-(t-5)/4}\sin(t-5)\frac{\sqrt{15}}{4}$$

5.5 O integral de convolução

Por vezes a transformada de Laplace é o produto de dois factores. Embora isso não queira dizer que essa transformada de Laplace seja o produto de duas tranformadas de Laplace há algo que se pode aproveitar neste contexto.

Proposição 5.5 *Se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ e se $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, para $s > a \geq 0$, então*

$$H(s) = F(s)G(s) = \mathcal{L}\{h(t)\}(s) \qquad s > a$$

onde

$$h(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

A função h é chamada a convolução *de f e g; os integrais acima são chamados de integrais de convolução.*

Dem: a igualdade dos integrais acima prova-se fazendo uma mudança de variável de integração $t' = t-\tau$.

Por outro lado, com

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st'}f(t')dt' \qquad\qquad G(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)d\tau$$

então

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st'}f(t')dt' \cdot \int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}g(\tau)\left[\int_0^\infty e^{-st'}f(t')dt'\right]d\tau =$$
$$= \int_0^\infty g(\tau)\left[\int_0^\infty e^{-s(t'+\tau)}f(t')dt'\right]d\tau = \ldots$$

fazendo

$$t' = t-\tau \qquad dt' = dt \qquad t' = 0 \Rightarrow t = \tau \qquad t' = +\infty \Rightarrow t = +\infty$$

donde

$$\cdots = \int_0^\infty g(\tau)\left[\int_\tau^\infty e^{-st}f(t-\tau)dt\right]d\tau = \int_0^\infty e^{-st}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right]dt = \int_0^\infty e^{-st}h(t)dt = \mathcal{L}\{h(t)\}(s)$$

■

Exemplos:

1. Calcular a inversa da transformada de Laplace de

$$H(s) = \frac{a}{s^2(s^2+a^2)} = \frac{1}{s^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}$$

Como já sabemos que

$$\frac{1}{s^2} = \mathcal{L}\{t\}(s) \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{s^2+a^2} = \mathcal{L}\{\sin at\}(s)$$

então pelo resultado anterior, a transformada inversa de $H(s)$ é:

$$h(t) = \int_0^t (t-\tau)\sin a\tau d\tau = \left[-\frac{(t-\tau)}{a}\cos a\tau\right]_0^t + \frac{1}{a}\int_0^t \cos a\tau dt = \frac{t}{a} + \frac{1}{a^2}\left[\sin a\tau\right]_0^t = \frac{t}{a} - \frac{\sin at}{a^2}$$

2. Encontre a solução do PVI:

$$y'' + 4y = g(t) \qquad y(0) = 3 \quad y'(0) = -1$$

Argumentando como anteriormente chegamos a

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{3s-1}{s^2+4} + \frac{G(s)}{s^2+4} = \dots$$

onde

$$G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

$$\dots = 3\frac{s}{s^2+4} - \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{2}\frac{2}{s^2+4}G(s)$$

donde

$$y(t) = 3\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

Se uma g específica é dada, o integral pode ser calculado ...