

1. Encontre todas as soluções das equações:

$$a) e^w = i \quad b) e^w = 1 + i \quad c) e^w = -2$$

2. Calcule o valor principal do logaritmo para

$$a) z = i \quad b) z = 1 + i \quad c) z = -2$$

3. Mostre que as seguintes funções satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em  $z = 0 + i0$  embora não sejam diferenciáveis nesse ponto:

$$f(z) = \begin{cases} \overline{z^3}/|z|^2, & \text{se } z \neq 0 + i0 \\ 0 + i0, & \text{se } z = 0 + i0 \end{cases}$$

$$g(x + iy) = \begin{cases} (x^{4/3}y^{5/3} + ix^{5/3}y^{4/3})/(x^2 + y^2), & \text{se } z \neq 0 + i0 \\ 0 + i0, & \text{se } z = 0 + i0 \end{cases}$$

4. Use as condições de Cauchy-Riemann para mostrar que as seguintes funções não são diferenciáveis:

$$f(x + iy) = 2y - ix$$

5. Mostre que

$$h(z) = x^3 + 3xy^2 - 3x + i(y^3 + 3x^2y - 3y)$$

é diferenciável ao longo dos eixos coordenados mas não é holomorfa em nenhum domínio.

6. Mostre que são holomorfas as funções:

$$g(z) = 3x^2 + 2x - 3y^2 - 1 + i(6xy + 2y) \quad \text{escreva esta função à custa de } z$$
$$h(z) = e^{x^2 - y^2} (\cos(2xy) + i \sin(2xy)) \quad \text{qual é a derivada desta função?}$$

7. Escreva as condições de Cauchy-Riemann em termos de  $r$  e  $\theta$ .

8. Mostre que se  $f$  é uma função holomorfa com  $u$  e  $v$  duas vezes diferenciáveis e com segundas derivadas contínuas, então  $u$  e  $v$  são funções harmônicas isto é,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$