1. Sobre a mesma equação diferencial, $y'' + y = 0$, resolva os seguintes problemas de fronteira ou mostre que não têm solução.

$$a) \quad y(0) = 0, \quad y'(\pi) = 1 \qquad\qquad b) \quad y'(0) = 1, \quad y'(\pi) = 0$$
$$c) \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \qquad\qquad d) \quad y'(0) = 1, \quad y(L) = 0$$

2. Esboce o gráfico e calcule as séries de Fourier de:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leq x < 0, \\ 0, & 0 \leq x < \pi \end{cases} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} x + L, & -L \leq x \leq 0, \\ L, & 0 < x < L \end{cases} \qquad f(x + 2L) = f(x)$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \leq x \leq -1, \\ x, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \qquad f(x + 4) = f(x)$$

3. Usando séries de Fourier, encontre a solução formal dos PVI's:

$$y'' + \omega^2 y = f(t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

onde

$$a) \quad f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \qquad\qquad b) \quad f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi, \\ 0 & t = 0, \pi, 2\pi, \\ -1, & \pi < t < 2\pi, \end{cases} \qquad f(x+2\pi) = f(x)$$

4. Estabeleça a identidade de Parseval para as séries de Fourier i.e., mostre que, se

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

então

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} [f(x)]^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right)$$

5. Obtenha as seguintes séries para as seguintes funções:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad \text{séries do coseno, período 4}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \end{cases} \qquad \text{séries do seno, período 4}$$

6. Verifique se o método de separação de variáveis pode ser usado nas seguintes equações às derivadas parciais para reescrevê-las à custa de um sistema de equações diferenciais ordinárias.

$$a)\quad xu_{xx}+u_t=0 \qquad b)\quad u_{xx}+u_{xt}+u_t=0 \qquad c)\quad \big[p(x)u_x\big]_x-r(x)u_{tt}=0$$

7. Encontre a solução do problema de condução de calor:

$$\begin{aligned}&100u_{xx}=u_t \quad 0<x<1, \quad t>0\\&u(0,t)=0, \quad u(1,t)=0, \quad t>0\\&u(x,0)=\sin(2\pi x)-\sin(5\pi x), \quad 0\le x\le 1\end{aligned}$$