Análise Complexa e Equações Diferenciais - Tagus Park 1o. Sem. 2008/2009
1o. Teste — Duração: 90 minutos — 25 de Outubro de 2008

1. Para cada inteiro positivo n, considere o número complexo

$$w_n = \frac{1}{(-1 - i\sqrt{3})^n}$$

Escreva w_n na forma polar e esboce a sua localização no plano de Argand, para $n = 1, 2, \ldots, 6$.

2. Mostre que a função complexa de variável complexa $g(z) = |z|^2$ é diferenciável em $z = 0$. Será que g é holomorfa sobre algum domínio?

3. Escreva a série de McLaurin de

$$g(z) = \frac{4}{z^2 - 4iz - 3}$$

indicando o raio de convergência da série e o valor de $g^{(32)}(0)$

4. Calcule

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz$$

onde γ é a circunferência centrada na origem e de raio 2, percorrida uma vez no sentido anti-horário.

5. Escreva as séries de Laurent de

$$f(z) = \frac{1}{z^2(2 - z)}$$

para as coroas circulares $C(0; 0, 2)$ e $C(0; 2, \infty)$. Classifique a singularidade em questão.

6. Estude a natureza de

$$\int_{10}^{\infty} \frac{x^{15} + \cos(x) - 49}{x^{17} + \sin(x) + 30} dx$$

7. Calcule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{\mu + x^2} dx \qquad \text{onde } \lambda \text{ e } \mu \text{ são números reais positivos}$$

8. Considere a função $f(z) = \overline{z}$, definida em $\mathbb{C}$. Mostre que o integral de f sobre qualquer curva regular fechada é um número complexo cuja parte real é nula.