Análise Complexa e Equações Diferenciais - Tagus Park - 1o. Sem. 2008/2009
1o. Teste (Recuperação) Duração: 90 minutos 13 de Janeiro de 2009

1. Em $\mathbb{C}$, calcule **todas** as soluções da equação
$$e^{z^2-2z+1} = 1$$
apresentando-as na forma algébrica, $a + ib$.

2. Dada uma função f holomorfa sobre um domínio Ω, mostre que a função
$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$
definida para todo o z pertencente a
$$\Omega^\dagger = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \overline{z} \in \Omega\}$$
é holomorfa sobre $\Omega^\dagger$.

3. Dados os reais distintos positivos r_1 e r_2, mostre que são homotopicos os caminhos:
$$\gamma_1(t) = r_1 e^{it} \quad \text{para } t \in [0, 2\pi] \qquad \text{e} \qquad \gamma_2(t) = r_2 e^{it} \quad \text{para } t \in [0, 2\pi]$$

4. Escreva a série de Taylor em torno de $z_0 = 1$ de
$$g(z) = \frac{4}{z^2 - 4iz - 3}$$
indicando o raio de convergência da série e o valor de $g^{(17)}(1)$.

5. Calcule
$$\int_C \frac{1}{\sin(z)} dz$$
onde C é a circunferência centrada na origem e de raio 1, percorrida uma vez no sentido anti-horário.

6. Calcule
$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2} dz$$
onde γ é a circunferência centrada na origem e de raio 2, percorrida uma vez no sentido anti-horário.

7. Determine a natureza de
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(\log^2(x))}{\sqrt{x}\,\sqrt{1+x^3}} dx$$

8. Calcule
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{x^2+1} dx$$