Análise Complexa e Equações Diferenciais - Tagus Park
1o. Semestre 2008/2009
3o. Teste **Duração: 90 minutos** **13 de Dezembro de 2008**
Justifique as suas respostas

1. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:
$$\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = -5x_1 + 2x_2 \end{cases} \qquad x_1(0) = 0 \qquad x_2(0) = 1$$

2. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:
$$\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2 + t \\ x_2' = 3x_1 + 5x_2 - e^{4t} \end{cases} \qquad x_1(0) = 1 \qquad x_2(0) = 0$$

3. Sendo a, b, c parâmetros reais, tais que $a^2 - bc \neq 0$, considere o sistema de equações diferenciais:
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \mathbf{x}$$
Diga quais são os distintos tipos qualitativos de soluções que este sistema possui, indicando quais os valores de a, b, c que caracterizam cada um deles.

4. Sendo a e L parâmetros reais ($L \neq 0$), considere o problema fronteiro:
$$y'' + ay = 0 \qquad y(0) = 0 = y'(L)$$
Mostre as diferentes possibilidades de existência ou não de solução deste problema em função do parâmetro a, mostrando tambem se a solução é única ou não, e se é trivial ou não, quando esta existe.

5. Mostre que, para $0 < t < \pi$,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1} \sin(nt)}{n} = t$$

6. Considere a equação de condução de calor em duas dimensões:
$$\alpha^2(u_{xx} + u_{yy}) = u_t$$
Usando separação de variáveis, reescreva esta equação como um sistema de equações diferenciais ordinárias desacoplado.

7. Será que
$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cos nx$$
pode ser a série de Fourier de uma função limitada com derivada seccionalmente contínua? Sugestão: Use a identidade de Parseval.