Análise Complexa e Equações Diferenciais - Tagus Park - 1o. Sem. 2008/2009
3o. Teste (Recuperação) Duração: 90 minutos 13 de Janeiro de 2009
Justifique as suas respostas

1. Resolva o seguinte problema de valores iniciais:

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - y \end{cases} \qquad x(0) = 1 \qquad y(0) = 5$$

2. Apresente uma solução de:

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} e^t \\ e^{2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

3. Considere os parâmetros reais a e $L \neq 0$ e o problema fronteiro:

$$y'' - 2y' + (1+a)y = 0 \qquad y(0) = 0 = y(L)$$

Discuta a existência ou não de soluções triviais deste problema em função de a e de L. Caso haja soluções não triviais, diga para que valores de a e L este problema tem mais do que uma solução.

4. Caracterize todas as funções que são simultâneamente pares e ímpares sobre um intervalo $[-L, L]$ $(L > 0)$.

5. Encontre a série de Fourier para a função

$$f(x) = \sin^2 x$$

no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

6. Use o método de separação de variáveis para resolver o problema fronteiro:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial y} + u, \qquad u(0, y) = 2e^{-y} - e^{2y}$$

7. Encontre a solução da equação de Laplace no rectângulo $0 < x < a, 0 < y < b$, satisfazendo as condições fronteira:

$$\begin{array}{lll} u(0, y) = 0, & u(a, y) = 0, & 0 < y < b \\ u(x, 0) = h(x), & u(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a \end{array}$$

onde h é uma função contínua sobre o intervalo $a \leq x \leq b$.

8. Será que

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n}} \cos nx$$

pode ser a série de Fourier de uma função limitada com derivada seccionalmente contínua? Sugestão: Use a identidade de Parseval.