Análise Matemática II, 1o. Semestre 2006-2007
10a. Lista de Exercícios (20 e 21 de Novembro)
(Cursos: LEA, LEM, LEAN)

1. Considere uma função real f, definida em $\mathbb{R}^2$ e tal que, para cada $(x,y) \neq (0,0)$,

$$f(x,y) = 1 + xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

(i) Se f for contínua na origem, qual será o valor de $f(0,0)$?
(ii) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(a,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,a)$ onde a é um número real.

2. Determine o domínio e calcule as derivadas parciais de

$$a) \quad f(x,y) = \frac{x \sinh y}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ; \qquad\qquad b) \quad g(x,y) = \int_1^{x^2 y} e^{-t^2}dt$$

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{se } x+y>0 \\ x+y, & \text{se } x+y \leq 0 \end{cases}$$

a) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.
b) Determine, caso existam, as derivadas segundo o vector $(1,1)$ nos pontos $(1,1)$ e $(1,-1)$.

4. Seja g a função real definida em $\mathbb{R}^2$ pela expressão

$$g(x,y) = \begin{cases} x+y, & \text{se } xy>0 \\ 0, & \text{se } xy \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.
b) Calcule $g'_{(1,1)}(0,0)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g no ponto $(0,0)$?

5. Calcule as derivadas $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$ de

$$\begin{aligned}
&(a) \quad r = e^{u+v+w}; u = yz, v = xz, w = xy \\
&(b) \quad r = uvw - u^2 - v^2 - w^2; u = y+z, v = x+z, w = x+y \\
&(c) \quad r = \sin\left(\frac{p}{q}\right); p = \sqrt{xy^2z^3}, p = \sqrt{x+2y+3z} \\
&(d) \quad r = \frac{p}{q} + \frac{q}{s} + \frac{s}{p}; p = e^{yz}, q = e^{xz}, s = e^{xy}
\end{aligned}$$

6. Seja $f(x,y)$ uma função de classe C^1 e seja $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Mostre que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$$