Análise Matemática II, 1o. Semestre 2006-2007
12a. Lista de Exercícios (4 e 5 de Dezembro)

(Cursos: LEA, LEM, LEAN)

1. Determine extremos locais e pontos de sela das funções dadas pelas seguintes expressões:

$a)\quad 3y^2-2y^3-3x^2+6xy \qquad b)\quad 9x^3+\frac{1}{3}y^3-4xy$

$c)\quad 8x^3+y^3+6xy \qquad d)\quad x^3+y^3+3x^2-3y^2-8$

$e)\quad 2x^3+2y^3-9x^2+3y^2-12y \qquad f)\quad 4xy-x^4-y^4$

$g)\quad x^4+y^4+4xy \qquad h)\quad 3x^4-4x^2y+y$

$i)\quad x^2+y^2+e^{xy}$

2. Determine o desenvolvimento de Taylor de 2a. ordem em torno de $(0,0)$ da função $f(x,y)=x\sin(y)+y\sin(x)$. Aproveite o resultado para calcular o valor de a tal que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-axy}{x^2+y^2}=0$$

3. Seja $f(s,t)$ o quadrado da distância entre um ponto da recta $x=t, y=t+1, z=2t$ e um ponto da recta $x=2s, y=s-1, z=s+1$. Mostre que o único ponto crítico de f é um mínimo. Interprete o resultado geometricamente.

4. Seja $f(x,y)$ o quadrado da distância do ponto $(0,0,2)$ a um ponto da superfície $z=xy$. Calcule e classifique os pontos de estacionariedade de f.

5. Seja $f(x,y)=\log(e^x+e^y)$, com $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Verificar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=0$$

6. Considere a equação com derivadas parciais (equação das ondas)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a>0)$$

Uma função $u=u(x,t)$ com derivadas parciais de 2a. ordem contínuas diz-se solução desta equação se u satisfaz a equação em todos os pontos do seu domínio. Mostrar que qualquer função f com 2a. derivada contínua e tal que

$$u(x,t)=f(x-at)$$

é solução da equação das ondas. O mesmo para a função

$$w(x,t)=g(x+at)$$

Finalmente, mostre que qualquer função do tipo

$$u(x,t) = c_1 f(x - at) + c_2 g(x + at)$$

com c_1 e c_2 constantes e f e g com 2as. derivadas contínuas satisfaz a equação das ondas.

7. Sejam a, b e c números reais não todos nulos. Em que ponto da bola unitária em $\mathbb{R}^3$,

$$\{(x,y,z) \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

atinge a função

$$f(x,y,z) = ax + by + cz$$

o seu valor máximo?