

1. Seja f uma função real definida num domínio D contido em \mathbb{R}^m e diferenciável num ponto a interior a D . Partindo de a , qual a direcção segundo a qual a variação da função é maior?

2. Calcule as derivadas parciais em $(0, 0)$ das seguintes funções, mostrando também se essas derivadas parciais são ou não contínuas em $(0, 0)$ (para qualquer um destas funções $f(0, 0) = 0$):

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (b) \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \quad (c) \quad f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

$$(d) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad (e) \quad f(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad (f) \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

3. Considere uma função real f , definida em \mathbb{R}^2 e tal que, para cada $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$f(x, y) = 1 + xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

(i) Se f for contínua na origem, qual será o valor de $f(0, 0)$?

(ii) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, a)$ onde a é um número real.

4. Determine o domínio e calcule as derivadas parciais de

$$a) \quad f(x, y) = \frac{x \sinh y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ; \quad b) \quad g(x, y) = \int_1^{x^2 y} e^{-t^2} dt$$

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{se } x + y > 0 \\ x + y, & \text{se } x + y \leq 0 \end{cases}$$

a) Estude a diferenciabilidade de f em $(0, 0)$.

b) Determine, caso existam, as derivadas segundo o vector $(1, 1)$ nos pontos $(1, 1)$ e $(1, -1)$.

6. Seja g a função real definida em \mathbb{R}^2 pela expressão

$$g(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{se } xy > 0 \\ 0, & \text{se } xy \leq 0 \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0)$.

b) Calcule $g'_{(1,1)}(0, 0)$. Que pode concluir quanto à diferenciabilidade de g no ponto $(0, 0)$?