Análise Matemática II, 1o. Semestre 2005-2006
11a. Lista de Exercícios (29 de Novembro)
(Cursos: LEM, LEMat, LEGM)

1. Considere as seguintes funções, pontos e vectores:

$$(a) \quad f(x,y) = \log(x^2+y^2) \qquad (x_0,y_0) = (1,2) \qquad (v_1,v_2) = (1,1)$$

$$(b) \quad f(x,y) = x\cos\left(\frac{\pi}{y}\right) \qquad (x_0,y_0) = (3,1) \qquad (v_1,v_2) = (-1,2)$$

$$(c) \quad f(x,y) = \arctan(x^2 y) \qquad (x_0,y_0) = (2,3) \qquad (v_1,v_2) = (2,-1)$$

$$(d) \quad f(x,y) = xye^{x+y} \qquad (x_0,y_0) = (1,4) \qquad (v_1,v_2) = (-1,-1)$$

Para cada alínea,
(1) Calcule a aplicação linear derivada de f em (x_0, y_0);
(2) Escreva a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto (x_0, y_0);
(3) Calcule a taxa de variação de f no ponto (x_0, y_0), na direcção de (v_1, v_2).

2. Calcule $\frac{d}{dt} f \circ \gamma$ no ponto t_0, sabendo que:;

$$(1) \quad t_0 = 1, \qquad \gamma(t) = (2t, t^3), \qquad J^f_{(u,v)} = \begin{pmatrix} v+2u & u+2v \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad t_0 = \pi, \qquad \gamma(t) = (\sin(t), \cos(t)), \qquad J^f_{(u,v)} = \begin{pmatrix} 2uv+v^2+1 & u^2+2uv+1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad t_0 = 3, \qquad \gamma(t) = (t+1, \frac{1}{t}), \qquad J^f_{(u,v)} = \begin{pmatrix} v+ue^u & u+1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad t_0 = 2, \qquad \gamma(t) = (t^2+1, t), \qquad J^f_{(u,v)} = \begin{pmatrix} v^2+2u & 2uv \end{pmatrix}$$

3. Calcule as derivadas $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$:

$$(a) \quad r = e^{u+v+w}, \qquad u = yz,\ v = xz,\ w = xy$$

$$(b) \quad r = uvw - u^2 - v^2 - w^2, \qquad u = y+z,\ v = x+z,\ w = x+y$$

$$(c) \quad r = \sin\frac{p}{q}, \qquad p = \sqrt{xy^2z^3},\ q = \sqrt{x+2y+3z}$$

$$(d) \quad r = \frac{p}{q} + \frac{q}{s} + \frac{s}{p}, \qquad p = e^{yz},\ q = e^{xz},\ s = e^{xy}$$

4. Calcule a derivada direccional das seguintes funções no ponto e direcção indicadas:

$$(a) \quad f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2, \qquad (x_0, y_0) = (2,1) \qquad (v_1, v_2) = (1,1)$$

$$(b) \quad f(x,y) = e^x \sin(y), \qquad (x_0, y_0) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \qquad (v_1, v_2) = (1,-1)$$

$$(c) \quad f(x,y) = \sin(x)\cos(y), \qquad (x_0, y_0) = \left(\frac{\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right) \qquad (v_1, v_2) = (4,-3)$$

$$(d) \quad f(x,y,z) = xy + yz + zx, \qquad (x_0, y_0, z_0) = (4,0,-3) \qquad (v_1, v_2, v_3) = (0,1,-1)$$