Análise Matemática II, 1o. Semestre 2005-2006
12a. Lista de Exercícios (6 de Dezembro)
(Cursos: LEM, LEMat, LEGM)

1. Determine extremos locais e pontos de sela das funções dadas pelas seguintes expressões:

$$a)\quad 3y^2-2y^3-3x^2+6xy \qquad b)\quad 9x^3+\frac{1}{3}y^3-4xy$$
$$c)\quad 8x^3+y^3+6xy \qquad d)\quad x^3+y^3+3x^2-3y^2-8$$
$$e)\quad 2x^3+2y^3-9x^2+3y^2-12y \qquad f)\quad 4xy-x^4-y^4$$
$$g)\quad x^4+y^4+4xy \qquad h)\quad 3x^4-4x^2y+y$$
$$i)\quad x^2+y^2+e^{xy}$$

2. Escreva a equação do plano (ou recta) tangente à superfície (ou curva) no ponto indicado:

$$(a)\quad x^2+y^2+z^2=9, \qquad (x_0,y_0,z_0)=(1,2,2)$$

$$(b)\quad x^3+y^3+z^3=5xyz, \qquad (x_0,y_0,z_0)=(2,1,1)$$

$$(c)\quad z^3+(x+y)z^2+x^2+y^2=13, \qquad (x_0,y_0,z_0)=(2,2,1)$$

$$(d)\quad 2x^2+3y^2=35, \qquad (x_0,y_0)=(2,3)$$

$$(e)\quad x^4+xy+y^2=19, \qquad (x_0,y_0)=(2,-3)$$

$$(f)\quad xyz+x^2-2y^2+z^3=14, \qquad (x_0,y_0,z_0)=(5,-2,3)$$

3. Para cada uma das seguintes funções e no ponto indicado, calcule a derivada direccional máxima e indique a respectiva direcção.

$$(a)\quad f(x,y)=2x^2+3xy+4y^2, \qquad (x_0,y_0)=(1,1)$$

$$(b)\quad g(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x}\right), \qquad (x_0,y_0)=(1,-2)$$

$$(c)\quad h(x,y)=\log\left(x^2+y^2\right), \qquad (x_0,y_0)=(3,4)$$

$$(d)\quad f(x,y,z)=3x^2+y^2+4z^2, \qquad (x_0,y_0,z_0)=(1,5,-2)$$

$$(e)\quad f(x,y,z)=e^{x-y-z}, \qquad (x_0,y_0,z_0)=(5,2,3)$$

4. Seja $f(x, y) = \log(e^x + e^y)$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Verificar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

5. Considere a equação com derivadas parciais (equação das ondas)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a > 0)$$

Uma função $u = u(x, t)$ com derivadas parciais de 2a. ordem contínuas diz-se solução desta equação se u satisfaz a equação em todos os pontos do seu domínio. Mostrar que qualquer função f com 2a. derivada contínua e tal que

$$u(x, t) = f(x - at)$$

é solução da equação das ondas. O mesmo para a função

$$w(x, t) = g(x + at)$$

Finalmente, mostre que qualquer função do tipo

$$u(x, t) = c_1 f(x - at) + c_2 g(x + at)$$

com c_1 e c_2 constantes e f e g com 2as. derivadas contínuas satisfaz a equação das ondas.

6. Sejam a, b e c números reais não todos nulos. Em que ponto da bola unitária em $\mathbb{R}^3$,

$$\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

atinge a função

$$f(x, y, z) = ax + by + cz$$

o seu valor máximo?