Análise Matemática II, 1o. Semestre 2005-2006
8a. Lista de Exercícios (4 de Novembro)
(Cursos: LEM, LEMat, LEGM)

1. (Regra do paralelogramo) Mostre que, para todos os x e y em $\mathbb{R}^m$,

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\big(||x||^2 + ||y||^2\big)$$

Interprete geometricamente.

2. Mostre que, para todos os x e y em $\mathbb{R}^m$,

$$\Big|\,||x|| - ||y||\,\Big| \leq ||x-y||$$

3. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^2$,

$$D = \{(x,y) \mid xy > 1\}$$

(a) Indique um ponto interior, um ponto fronteiro e um ponto exterior ao conjunto D e diga se D é aberto, fechado, limitado, conexo.

(b) Dê um exemplo de uma sucessão de termos em D que convirja para um ponto não pertencente a D. Seria possível dar um exemplo de uma sucessão cujos pontos não pertencessem a D e que convergisse para um ponto de D?

4. Sejam u_n e v_n os termos gerais de duas sucessões em $\mathbb{R}^m$ e suponha que u_n converge para o elemento de coordenadas nulas e que v_n é limitada. Nestas condições, mostre que a sucessão produto interno de u_n com v_n, $u_n \cdot v_n$, converge para zero.

5. Sejam A e B dois conjuntos não vazios de $\mathbb{R}^m$ e suponha-se que A é fechado.

(a) Mostre que se existir $x \in \mathbb{R}^m$, uma sucessão x_n de termos em A, e uma sucessão y_n de termos em B tais que ambas convergem para x, então A e B não são separados.

(b) Mostre por meio de um exemplo que a proposição anterior seria falsa se se omitisse a hipótese de A ser fechado.

6. Sejam x_n e y_n os termos gerais de duas sucessões em $\mathbb{R}^m$ e admita que x_n converge para z e que, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$, $||x_n - y_n|| < \frac{1}{n}$. Nestas condições:

(a) Justifique que y_n converge para z

(b) Supondo que $A \subset \mathbb{R}^m$ é tal que $x_n \in A$ e $y_n \notin A$ (qualquer que seja n), justifique que z é um ponto fronteiro do conjunto A.