Análise Matemática II, 1o. Semestre 2005-2006
9a. Lista de Exercícios (15 de Novembro)
(Cursos: LEM, LEMat, LEGM)

1. Quais das seguintes funções têm limite na origem:

$$(a)\ \frac{xy}{x^3+y^2} \qquad (b)\ \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (c)\ \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$
$$(d)\ \frac{xy^2}{x^4+y^4} \qquad (e)\ \frac{y^3y^2}{x^2+y^2} \qquad (f)\ (x^4+y^4)e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(0,0) = 0$$
$$f(x,y) = \frac{y-2x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a) Prove que esta função não é contínua em $(0,0)$.

b) Considere a restrição desta função ao conjunto $D = \{(x,y) \mid |y| \leq x^2\}$. Prove que esta restrição de f é contínua em $(0,0)$.

c) Verifique que a conclusão da alínea anterior não seria válida se, em vez da restrição a D, considerássemos a restrição a

$$D_k = \{(x,y) \mid |y| \leq \frac{x}{k}\} \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

3. Considere a função dada pela expressão

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy-1}}$$

definida em $D = \{(x,y) \mid xy > 1\}$.

a) Indique, justificando os pontos em que f é contínua.

b) Existirá algum ponto fronteiro ao domínio D ao qual f possa prolongar-se por continuidade?

c) Indique, justificando, o contradomínio de D.

4. Seja f a função dada por

$$f(x,y) = x\log(xy)$$

a) Indique o domínio D de f, interprete-o geometricamente e determine o seu interior, o seu exterior e a sua fronteira. Indique justificando se D é aberto, fechado, limitado, conexo.

b) A função f é contínua em todo o seu domínio? Justifique.

c) Mostre que, sendo S uma semirecta com origem no ponto $(0,0)$ e contida no domínio de f, o limite de f em $(0,0)$ relativo ao conjunto S,

$$\lim_{\substack{(x,y)\mapsto(0,0)\\(x,y)\in S}} f(x,y)$$

tem o mesmo valor para toda a semirecta S nas condições indicadas.

d) Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} f(x,y)$. Calcule o limite quando $(x,y)\mapsto(0,0)$ ao longo da linha de equação $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

5. Seja A um subconjunto não vazio de $\mathbb{R}^m$ e $b \in \mathbb{R}^m$. Chama-se distância do ponto b ao conjunto A - notação: $d(b,A)$ - ao ínfimo do conjunto formado pelas distâncias de b a cada um dos pontos de A:

$$d(b,A) := \inf\{||\, x - b \,||\; |x \in A\}$$

Tendo em conta esta definição:

a) Justifique que, se $b \in A$, $d(b,A) = 0$ e mostre por meio de um exemplo que pode ter-se $d(b,A) = 0$ com $b \notin A$

b) Prove que se A é fechado e se $d(b,A) = 0$ então $b \in A$

c) Justifique que, se A é não vazio, limitado e fechado, então existe um ponto $a \in A$ tal que $d(b,A) = ||\, a - b \,||$. (Note que "norma de..." é uma função contínua)

d) Prove que o resultado da alínea anterior é ainda verdadeiro, supondo apenas que A é fechado e não vazio.