

Justifique as suas respostas e apresente os seus cálculos.

**I**

1. Escreva as somas de Darboux inferior e superior da função:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{se } x \text{ irracional} \\ 0, & \text{se } x \text{ racional} \end{cases}$$

relativas a uma decomposição  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  do intervalo  $[a, b]$  (com  $a < b$ ).

2. Calcule os integrais inferior e superior de  $f$  relativos ao intervalo  $[a, b]$ .  
 $f$  é integrável em  $[a, b]$ ?

**II.** Calcule a forma geral das primitivas de

1.  $\frac{x^2 - 5}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$       2.  $\sin(\log(x))$       3.  $\frac{\sin(2x)}{\sqrt[5]{\sin^2(x) + 1}}$

**III.** Considere a figura plana limitada pelas linhas de equação:

$$y = \tan(x); \quad y = 0; \quad x = 0; \quad x = \frac{\pi}{4}$$

Calcule o volume do sólido gerado por rotação dessa figura em torno do eixo dos  $XX$ .

**IV.** Determine a função  $f$ , contínua e positiva em  $[0, +\infty[$ , que verifica:

$$\log(f(x)) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)f(t)} dt, \quad \text{para todo o } x \text{ em } \mathbb{R}$$

**V.** Usando uma mudança de variável conveniente, mostre que

$$\int_0^1 x^a(1-x)^b dx = \int_0^1 x^b(1-x)^a dx \quad a \text{ e } b \text{ constantes positivas}$$