

Justifique as suas respostas e apresente os seus cálculos.

I.

1. Considere a função:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{se } x \text{ é racional} \\ -e^x, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Escreva as somas de Darboux superior e inferior da função f relativas a um intervalo $[a, b]$, com $a < b$, e a uma sua decomposição d , com pontos $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

2. Calcule os integrais inferior e superior de f relativos ao intervalo $[a, b]$. f é integrável em $[a, b]$?

II. Calcule a forma geral das primitivas de

(a) $\left(\frac{x}{e^x}\right)^2$

(b) $\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$

(c) $\frac{1}{x^3+1}$

III.

Calcule a área da região plana definida por:

$$x^2 - 1 \leq y \leq (x + 1)^2 \quad \text{e} \quad -1 \leq x + y \leq 1$$

IV. Calcule o volume de um cone de altura h e raio de base r . (Tenha presente os métodos de cálculo de volumes de sólidos gerados por rotação de áreas abaixo de gráficos de funções)

V. Determine a constante real c e a função g , contínua e positiva, que verificam:

$$\int_0^x t^2 \ln(g(t)) dt = x^3 - x^4 + c$$