Análise Matemática II   3o. Teste   13 de Dezembro de 2006
2o. Semestre 2006/2007   LEA, LEAN, LEM

Justifique as suas respostas e apresente os seus cálculos.

I. Sendo a e c duas constantes não nulas, exprima c em termos de a para que a função

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\dfrac{x^2}{at}}$$

verifique

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

II. Considere a função

$$h(x,y) = \frac{e^{\sin(x)+\cos(y)}}{x^2+y^2}$$

(a) Determine o domínio de h e indique, justificando, quais os pontos desse domínio onde h é diferenciável.

(b) Qual é a taxa de variação máxima da função h no ponto $(0, \frac{\pi}{2})$? Indique tambem a direcção e sentido para os quais se observa essa taxa de variação máxima.

III. Mostre que as superfícies dadas pelas expressões

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \qquad \text{e} \qquad 10z = 25 + x^2 + y^2$$

têm o mesmo plano tangente no ponto $(x_o, y_o, z_o) = (3, 4, 5)$.

IV. Escreva o desenvolvimento de Taylor de 2a. ordem em torno de $(0,0)$ da função:

$$h(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2+1}\right)$$

V. Determine e classifique os pontos de estacionariedade das funções:

$(a)\quad f(x,y) = x^3 - y^3 + 3xy \qquad\qquad (b)\quad g(x,y) = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$