Análise Matemática II **3 de Janeiro de 2006**
2o. Semestre 2006/2007 **3o. Teste (Recuperação)** **LEA, LEAN, LEM**

Justifique as suas respostas e apresente os seus cálculos.

I. Sendo x_0, y_0, z_0 e a constantes reais com $a \neq 0$, verifique se a função

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\,\right)^3}\, e^{-\dfrac{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}{4a^2t}}$$

satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

II. Considere a função

$$h(x,y,z) = \frac{z e^{\sin(x)+\cos(y)}}{x^2+y^2+z^2}$$

(a) Determine o domínio de h e indique, justificando, quais os pontos desse domínio onde h é diferenciável.

(b) Qual é a taxa de variação máxima da função h no ponto $(0, \frac{\pi}{2}, 1)$. Indique tambem a direcção e sentido para os quais se observa essa taxa de variação máxima.

III. Sendo a, b e c constantes reais distintas e não nulas, considere as superfícies de equações:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \qquad\qquad x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2+c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}\left(b^2+c^2\right)$$

Determine o(s) ponto(s) onde estas superfícies têm os mesmos planos tangentes.

IV. Escreva o desenvolvimento de Taylor de 2a. ordem em torno de $(0,0)$ da função:

$$g(x,y) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-y}\right)$$

V. Determine e classifique os pontos de estacionariedade da função:

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{2} - x^2 + y^2\right) e^{1-x^2-y^2}$$