Análise Matemtica II, 1o. Semestre 2005-2006
LEM, LEMat, LEGM
1o. Teste - 10 de Outubro de 2005 - RESOLUÇÃO

1. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

a) Escreva as somas de Darboux superiores e inferiores de f relativamente a uma decomposição, d, do intervalo $[a,b]$ com pontos $a = x_0$, x_1, ... , x_{n-1}, $x_n = b$ $(0 < a < b)$, simplificando as expressões obtidas.

Já que, entre quaisquer dois números reais existe um número racional, então o supremo da função f num subintervalo genrico $[x_{k-1}, x_k]$ é x_k porque é o valor que a função assume nos racionais (e o único outro valor que a função assume é inferior a $0(< x_k)$). Então, para qualquer k tal que $1 \leq k \leq n$, tem-se

$$M_k = x_k$$

Analogamente,

$$m_k = 0$$

Assim,

$$S_d(f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1})$$

e

$$s_d(f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} 0(x_k - x_{k-1}) = 0$$

b) Calcule os integrais superiores e inferiores de f em $[a,b]$. f é integrável em $[a,b]$?

O integral inferior de f em $[a,b]$ é, por definição, o supremo das somas inferiores de Darboux de f em $[a, b]$ sobre todas as decomposições do intervalo $[a, b]$, isto é,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] }\}$$

Como vimos na alínea anterior, qualquer que seja a decomposição de $[a, b]$, a soma de Darboux inferior é sempre 0. Então, **no nosso caso**:

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)dx &= \inf\{S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] }\}\\ &= \inf\{0\} = 0\end{aligned}$$

O integral superior de f em $[a, b]$ é, por definição, o ínfimo das somas superiores de Darboux de f em $[a, b]$ sobre todas as decomposições do intervalo $[a, b]$, isto é,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S_d(f) \mid \ d \text{ é decomposição de [a, b] }\}$$

De acordo com a alínea anterior, decomposições diferentes terão somas de Darboux superiores diferentes e aparentemente não conseguimos encontrar uma expressão genérica para a soma de Darboux superior relativa a uma decomposição genérica de $[a, b]$.

No entanto,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k(x_k - x_{k-1})$$

é tambem a soma de Darboux superior relativa à decomposição d de $[a, b]$ da função

$$g(x) = x \qquad \text{para todo o } x \text{ em } [a, b]$$

donde,

$$\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)dx &= \overline{\int_a^b} xdx = \int_a^b xdx \ \text{ (já que } g(x) = x \text{ é integrável ...)}\\ &= \left[\frac{1}{2}x^2\right]_a^b \ \text{ (... regra de Barrow ...) } = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \neq 0 = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

e, portanto, f não é integrável em $[a, b]$.

2. Primitive as funções

$$a) \qquad f(x) = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)^2}$$

$$\frac{x}{(x^2-1)(x-2)^2} = \frac{x}{(x-1)(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C_2}{(x-2)^2} + \frac{C_1}{x-2}$$

onde A, B, C_1 e C_2 são constantes a determinar, de acordo com resultados discutidos nas teóricas:

$$A = \left.\frac{x}{(x+1)(x-2)^2}\right|_{x=1} = \frac{1}{(1+1)(1-2)^2} = \frac{1}{2}$$

$$B = \left.\frac{x}{(x-1)(x-2)^2}\right|_{x=-1} = \frac{-1}{(-1-1)(-1-2)^2} = \frac{1}{18}$$

$$C_2 = \left.\frac{x}{(x-1)(x+1)}\right|_{x=2} = \frac{2}{(2-1)(2+1)} = \frac{2}{3}$$

e finalmente, voltando à igualdade:

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C_2}{(x-2)^2} + \frac{C_1}{x-2}$$

multiplicando ambos os lados da igualdade por x e tomando limites quando x tende para ∞:

$$\lim_{x \mapsto \infty} \frac{x^2}{(x-1)(x+1)(x-2)^2} = \lim_{x \mapsto \infty} A\frac{x}{x-1} + \lim_{x \mapsto \infty} B\frac{x}{x+1} +$$
$$+ \lim_{x \mapsto \infty} C_2\frac{x}{(x-2)^2} + \lim_{x \mapsto \infty} C_1\frac{x}{x-2}$$

que resulta em

$$0 = A + B + C_1$$

ou seja

$$C_1 = -A - B = -\frac{1}{2} - \frac{1}{18} = -\frac{9+1}{18} = -\frac{5}{9}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\frac{x}{(x^2-1)(x-2)^2} =& \mathrm{P}\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{1}{18}}{x+1} + \frac{\frac{2}{3}}{(x-2)^2} + \frac{-\frac{5}{9}}{x-2}\right) = \\
&= \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{1}{18}\ln|x+1| - \frac{2}{3}\frac{1}{x-2} - \frac{5}{9}\ln|x-2| + c
\end{aligned}$$

$$b) \qquad g(x) = \arctan\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\arctan\left(\sqrt{x}\right) =& \int \arctan\left(\sqrt{x}\right)dx = \\
=& \left(t = \sqrt{x}, x = t^2, dx = 2tdt\right) \int \arctan(t) \cdot 2tdt = \\
=& t^2\arctan(t) - Pt^2 \cdot \frac{1}{1+t^2} = t^2\arctan(t) - \mathrm{P}\frac{1+t^2-1}{1+t^2} = \\
=& t^2\arctan(t) - \mathrm{P}1 + \mathrm{P}\frac{1}{1+t^2} = t^2\arctan(t) - t + \arctan(t) + c = \\
=& (x+1)\arctan\left(\sqrt{x}\right) - \sqrt{x} + c
\end{aligned}$$

$$c) \qquad h(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}x^2\sqrt{1-x^2} &= \int x^2\sqrt{1-x^2}dx = \\
&= \big(x=\sin(t), dx=\cos(t)dt\big)\int \sin^2(t)\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \\
&= \int \sin^2(t)\cos^2(t)dt = \frac{1}{4}\int\big(2\sin(t)\cos(t)\big)^2dt = \frac{1}{4}\int\sin^2(2t)dt = \dots
\end{aligned}$$

Como,

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$

então

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}\big(1-\cos(2\alpha)\big)$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{1}{4}\int\frac{1}{2}\big(1-\cos(4t)\big)dt = \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}\sin(4t) + c = \\
&= \frac{1}{8}t - \frac{1}{32}2\sin(2t)\cos(2t) = \\
&= \frac{1}{8}t - \frac{1}{16}2\sin(t)\cos(t)\big(\cos^2(t)-\sin^2(t)\big) + c = \\
&= \frac{1}{8}t - \frac{1}{16}2\sin(t)\cos(t)\big(1-2\sin^2(t)\big) + c = \\
&= \frac{1}{8}\arcsin(x) - \frac{1}{8}x\sqrt{1-x^2}\big(1-2x^2\big) + c
\end{aligned}$$

Alternativamente:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}x^2\sqrt{1-x^2} &= -\mathrm{P}(1-x^2-1)\sqrt{1-x^2} = \\
&= -\mathrm{P}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + \mathrm{P}\sqrt{1-x^2} = -\mathrm{P}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{P}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \dots
\end{aligned}$$

Por um lado,

$$\mathrm{P}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{P}x\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{P}x^2(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{P}(1-x^2-1)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \mathrm{P}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{P}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} =$$
$$= x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \arcsin(x) - \mathrm{P}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

e portanto

$$\mathrm{P}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\arcsin(x) + c$$

Por outro lado

$$\mathrm{P}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} = x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \mathrm{P}x\frac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x) = x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3\mathrm{P}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

e então

$$\mathrm{P}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = -x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - 3\mathrm{P}x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$$

donde

$$\mathrm{P}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{4}x(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{8}x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8}\arcsin(x) + c$$

3. Calcule a área da região do plano $X0Y$ limitada pelas curvas:

$$y = \ln(x), \quad y = e^x, \quad y = -x+1, \quad x = e$$

Observando a Figura 1 verificamos que a área a calcular é a soma das áreas A_1 com A_2.

$$A_1 = \int_0^1 \big(e^x - (-x+1)\big)\, dx = \left[e^x + \frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1 = e^1 + \frac{1}{2}1^2 - 1 - \big(e^0 + 0 - 0\big) = e - \frac{3}{2}$$

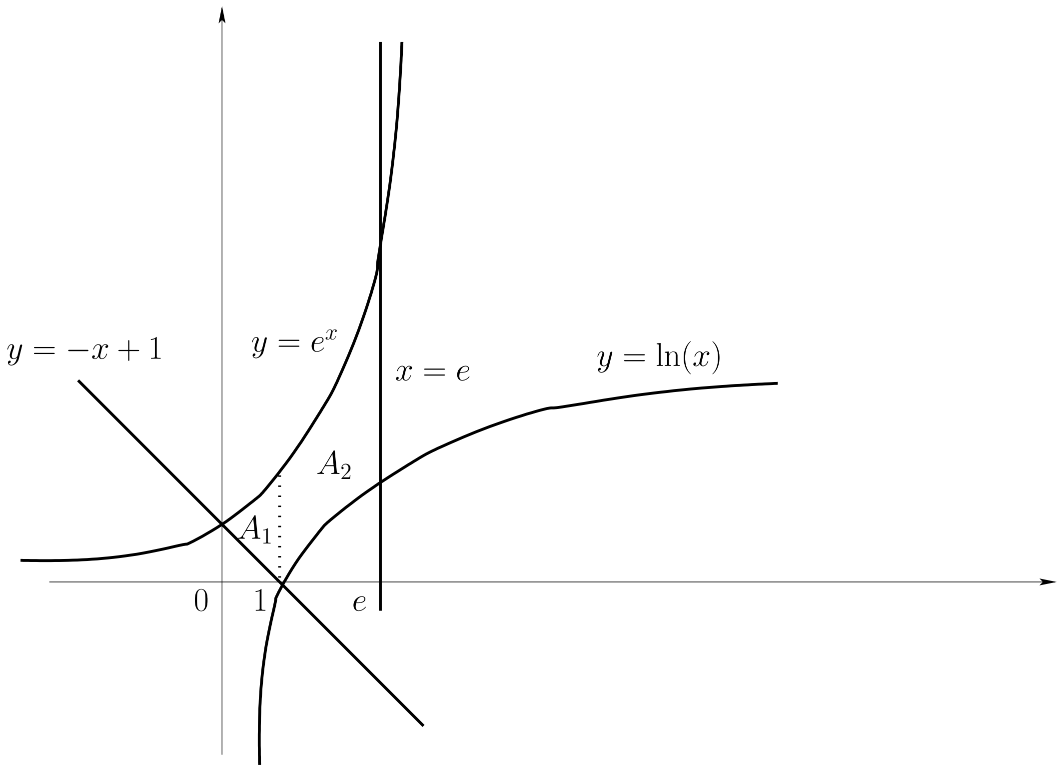

Figure 1: As curvas que delimitam a região cuja área queremos calcular

$$A_2 = \int_1^e \big(e^x - \ln(x)\big)\,dx = \Big[e^x - x\ln(x) + x\Big]_1^e = e^e - e\ln(e) + e - \big(e^1 + 1\ln(1) - 1\big) = e^e - e + 1$$

Finalmente, a área da região em causa é:

$$e - \frac{3}{2} + e^e - e + 1 = e^e - \frac{1}{2}$$

4. Sabendo que f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e que verifica a condição:

$$\int_{e^x}^{2} f(t)dt = x^2$$

determine $f(3)$.

Começamos por reescrever:

$$x^2 = \int_{e^x}^{2} f(t)dt = -\int_{2}^{e^x} f(t)dt$$

e notando que $\int_2^{e^x} f(t)dt$ é uma composição de funções:

$$\int_2^{e^x} f(t)dt = F \circ g(x)$$

onde

$$g(x) = e^x \qquad \text{e} \qquad F(y) = \int_2^y f(t)dt$$

então pelo Teorema da derivada da função composta

$$\left(\int_2^{e^x} f(t)dt\right)' = F \circ g'(x) = F'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(e^x\big)e^x$$

em que a última igualdade é uma consequência do Teorema Fundamental da Análise. Então:

$$2x = \big(x^2\big)' = -\left(\int_2^{e^x} f(t)dt\right)' = -f\big(e^x\big)e^x$$

donde

$$f\big(e^x\big) = -2x\, e^{-x}$$

e portanto

$$f(3) = f(e^{\ln(3)}) = -2\ln(3)\,\frac{1}{3} = -\frac{2\ln(3)}{3}$$