Análise Matemática II, 1o. Semestre 2005-2006
LEM, LEMat, LEGM
3o. Teste - 14 de Dezembro de 2005

Justifique as suas respostas

1. Seja $f(x,y) = \log(e^x + e^y)$, com $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Verificar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

2. Considere, em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ a função

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

Calcule os limites direccionais de f no ponto $(0,0)$. f é prolongável **por continuidade** a $(0,0)$?

3. Escreva uma equação do plano tangente à superfície

$$S = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 + \sin(xy) = 2 \,\}$$

no ponto $(\pi, \frac{1}{2}, -1)$.

4. Considere a função

$$f(x,y) = \log\big[(x-1)(y-1)\big]$$

a) Qual é o domínio de f? Indique, justificando, o conjunto dos pontos onde f é diferenciável.

b) Identifique a aplicação $f'(0,0)$ e calcule a derivada direccional máxima de f em $(0,0)$ e a respectiva direcção.

5. Calcule, caso existam, os máximos, mínimos e pontos de sela de

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 6xy$$

6. Seja g uma função real de variável real e diferenciável. Considere a função:

$$f(x,y) = xg(y/x)$$

Com $x_0 \neq 0$, mostre que passa pela origem o plano tangente ao gráfico de f no ponto $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$.