

Instituto Superior Técnico
Teste final de Matemática Computacional 26/01/2008
Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Computadores
VERSÃO A –SEGUNDA PARTE
Apresente todos os cálculos que efectuar

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f , com c real,

x_i	-2	0	2	4
$f(x_i)$	-1	5	27	c

- (a) Utilizando a fórmula de Newton, determine o polinómio de grau não superior a dois interpolador de f nos três primeiros pontos da tabela. [1.5]
- (b) Sabendo que f tem a forma $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + 5$, determine uma expressão para f , a partir do polinómio obtido na alínea anterior (sem recorrer ao cálculo de c). [1.5]
- (c) Pretende-se aproximar f por uma função g que minimize a soma Q , (sobre os três primeiros pontos da tabela): $Q = \sum_{i=0}^2 (f(x_i) - g(x_i))^2$. Determine g nos dois casos:
- i) $g(x) = a_0(x - 1) + a_1x^2$ [1.5]
- ii) No caso de $g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$, indique qual o valor das constantes, sem efectuar cálculos. [1.0]
2. Pretende-se aproximar o integral $I(F) = \int_0^2 F(x)dx$ por uma fórmula de quadratura

$$Q(F) = A_0 F(0) + A_1 F(4/3)$$

- (a) Utilizando o método dos coeficientes indeterminados, determine A_0 e A_1 de modo que a fórmula seja exacta para polinómios de grau ≤ 1 . [1.5]
- (b) Diga, tendo em conta a definição de grau de precisão, qual o grau da fórmula obtida em a). [0.5]
- (c) Sabe-se que, no caso de $f \in C^3[0, 2]$, é válida uma igualdade da forma:

$$I(f) - Q(f) = C f'''(\eta), \quad C \text{ const.real}, \quad \eta \in [0, 2].$$

Calcule a constante C . [1.5]

3. Considere a equação diferencial

$$y'(x) = \frac{1}{x}(2y(x) + x + 1) \quad x \in [1, 2],$$

com a condição inicial

$$y(1) = -1.$$

Utilizando o seguinte método de Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

com $h = 0.1$, obtenha um valor aproximado da solução $y(x)$ em $x = 1.1$. [1.0]