

Instituto Superior Técnico
Teste final de Matemática Computacional 26/01/2008
Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Computadores
VERSÃO B –SEGUNDA PARTE
Apresente todos os cálculos que efectuar

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	3	-1

- (a) Utilizando a fórmula de Lagrange, determine o polinómio de grau não superior a dois interpolador de f nos três pontos da tabela. [1.5]
- (b) Utilizando o polinómio obtido na alínea anterior, obtenha o polinómio p_3 que interpola f nos pontos da tabela e em $x = 3$, sabendo que a diferença dividida $f[1, 2, 3] = 1/2$. [1.5]
- (c) Pretende-se ajustar f por uma função do tipo $g(x) = Ax \operatorname{Sin}(\frac{\pi}{2}x) + B \operatorname{Cos}(\frac{\pi}{2}x)$. Utilizando o critério dos mínimos quadrados e os pontos $\{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3\}$ (e onde $f(3) = -4$), obtenha os valores dos parâmetros A, B . [1.5]
- (d) Tendo em conta a alínea c), prove que $Q = \sum_{i=0}^3 (f(x_i) - \alpha \operatorname{Cos}(\frac{\pi}{2}x_i))^2 > 5/2$ onde α é qualquer constante real. [1.0]
2. Pretende-se construir uma fórmula de quadratura $Q(F)$ tal que

$$I(F) = \int_{-1}^2 F(x)dx = Q(F) + R(F)$$

com $Q(F) = A_0 F(0) + A_1 F(2)$, onde A_0, A_1 são constantes reais.

- (a) Determine A_0, A_1 de modo a que a fórmula seja exacta para polinómios de grau ≤ 1 . [1.5]
- (b) Diga, tendo em conta a definição de grau de precisão, qual o grau da fórmula obtida em a). [0.5]
- (c) Sabe-se que, no caso de $f \in C^3[-1, 2]$, o termo $R(F)$ é dado por

$$R(F) = M f'''(\theta), \quad M \text{ const. real, } \theta \in [-1, 2].$$

Calcule a constante M . [1.5]

3. Seja a equação diferencial

$$y'(t) = \frac{y(t) \operatorname{sin}(y(t))}{1 + t^2}, \quad y(1) = 1$$

Obtenha uma aproximação de $y(1.1)$, pelo método do ponto médio com um passo $h = 0.1$:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(x_n, y_n))$$

[1.0]