

Instituto Superior Técnico  
**Teste final de Matemática Computacional 26/01/2008**  
Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Computadores  
**VERSÃO B –PRIMEIRA PARTE**  
**Apresente todos os cálculos que efectuar**

Grupo I

1. Pretende-se calcular aproximadamente o logaritmo natural de um número  $a > 1$ , partindo da aproximação inicial  $x_0 = a$  e usando um método iterativo.

(a) Supondo que se utiliza o método de Newton, diga justificando qual das seguintes funções iteradoras deve ser considerada: [1.0]

$$\begin{aligned} i) \quad & g(x) = e^x - a; \\ ii) \quad & g(x) = x - \frac{e^x - a}{e^x}; \\ iii) \quad & g(x) = x - \frac{e^x}{e^x - a}. \end{aligned}$$

(b) Nas condições da alínea anterior, prove a convergência do método. [1.5]

2. Determine os pontos fixos da função  $g(x) = x^2 + x - \frac{1}{2}$ . Para cada ponto fixo  $z$ , verifique se é atractor (isto é, se existe uma vizinhança  $V(z)$  tal que, se  $x_0$  pertence a essa vizinhança, então a sucessão gerada pela função  $g$  converge para  $z$ ). [1.5]

3. Sendo  $g$  a função definida na alínea anterior e  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  a sucessão gerada por  $g$ , com  $x_0 = -0.8$ , determine qual é o valor mínimo de  $n$  para garantir que  $|z - x_n| < 0.001$ , onde  $z$  é o limite dessa sucessão. [1.0]

Grupo II

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a & 0 \\ 3/2 & 3 & 3a \\ 0 & 3/2 & 3 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. Admitindo que  $a \neq 6$ , obtenha a factorização de Crout de  $A$ . [1.0]
2. Com base na factorização obtida, calcule  $DetA$ . Para que valores de  $a$  a matriz  $A$  é invertível? [1.0]
3. Justifique que o método de Jacobi é convergente, quando aplicado a um sistema com a matriz  $A$ , se e só se  $|a| < 3/2$ . [1.5]
4. Seja  $a = 3/4$  e  $b = (3, 3/2, 0)$ . Partindo da aproximação inicial  $x^{(0)} = (1, 0, 0.1)$ , efectue a primeira iteração do método de Jacobi e obtenha um majorante de  $\|x^{(1)} - x\|_1$ , onde  $x$  é a solução exacta do sistema. [1.5]