Instituto Superior Técnico

Resolução do Teste de Matemática Computacional 20/06/2008

Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial

1. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_i	-1	0	0.5	2
f_i	2	0.5	1	2.5

Com o objectivo de calcular um polinómio interpolador da função f, utilizaram-se os seguintes polinómios de Lagrange:

$$l_1(x) = -\frac{(x+1)(x-2)}{2.25},$$
$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-0.5)}{4.5}.$$

(a) Determine o terceiro polinómio de Lagrange, correspondente aos pontos considerados, e obtenha o polinhómio interpolador de f nesses pontos.

Resolução. Pela observação dos polinómios l_1 e l_2 conclui-se que os pontos de interpolação são $x_0 = -1$,$x_1 = 0.5$ e $x_2 = 2$. logo, o polinómio em falta é $l_0(x)$, ou seja, aquele que satisfaz $l_0(x_0) = 1$,$l_0(x_1) = l_0(x_2) = 0$. Esse polinómio tem a forma

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-1-x_1)(-1-x_2)} = \frac{(x-0.5)(x-x_2)}{4.5}$$

Finalmente, o polinómio interpolador de f em x_0,x_1 e x_2 tem a forma

$$P(x) = 2l_0(x)+l_1(x)+2.5l_2(x) = 2\frac{(x-0.5)(x-x_2)}{4.5} - \frac{(x+1)(x-2)}{2.25} + 2.5\frac{(x+1)(x-0.5)}{4.5}.$$

(b) Determine um valor aproximado de $f(1)$, usando o polinómio interpolador obtido na alínea anterior. Admitindo que a função f satisfaz a condição $|f^{(k)}(x)| \leq \frac{|x|}{k}, \forall x \in [-1, 2], k \in N$, determine um majorante do erro absoluto desta aproximação.

Resolução. Um valor aproximado de $f(1)$ é $P(1) = 2l_0(1) + l_1(1) + 2.5l_2(1) = \frac{11}{9} = 1.222....$

Para majorar o erro de interpolação devemos usar a fórmula

$$|e_2(x)| \leq \frac{\max_{x\in[-1,2]} |f^{(3)}(x)|}{3!} |(x+1)(x-0.5)(x-2)|.$$

De acordo com os dados do problema,

$$|f^{(3)}(x)| \leq 2/3.$$

Logo, para $x = 1$, verifica-se

$$|e_2(1)| \leq \frac{2}{3.3!} |(1+1)(1-0.5)(1-2)| = \frac{1}{9}.$$

(c) Determine a melhor aproximação da função tabelada por um polinómio de grau 1, no sentido dos mínimos quadrados (considerando todos os pontos da tabela).

Resolução. Uma vez que a função ajustadora é um polinómio de grau 1, temos $\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x$, $g(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x)$. São igualmente possíveis outras escolhas de ϕ_0 e ϕ_1, desde que sejam polinómios de grau não superior a 1 e linearmente independentes.

No caso da escolha indicada, temos o seguinte sistema normal:

$$\begin{bmatrix} 4 & 1.5 \\ 1.5 & 5.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3.5 \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $a_0 = 1.4, a_1 = 0.2667$. Concluindo, a melhor aproximação da forma procurada é $g(x) = 1.4 + 0.2667x$.

2. Para aproximar o integral definido $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)dt$, considere uma fórmula de quadratura do tipo:

$$Q(f) = A_0 f(-x) + A_1 f(x),$$

onde $0 < x \leq 1$.

(a) Calcule A_0 e A_1, usando o método dos coeficientes indeterminados.

Resolução. Para calcular A_0 e A_1 pelo método dos coeficientes indeterminados é necessário resolver o seguinte sistema de duas equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daqui obtém-se $A_0 = A_1 = 1$ (neste caso, os pesos não dependem do valor de x).

(b) Defina grau de uma quadratura e determine o grau da quadratura obtida, no caso de $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (2.5)

Resolução. Diz-se que uma quadratura tem grau k se for exacta para qualquer polinómio de grau menor ou igual a k, mas não for exacta, pelo menos, para um polinómio de grau $k + 1$. Neste caso, por construção, a quadratura Q tem, pelo menos, grau 1 , independentemente do valor de x (é exacta para qualquer polinómio de grau menor ou igual a 1). Para o caso particular de $x = 1/\sqrt{3}$, verifica-se ainda que

$$Q(t^2) = A_0(-1/\sqrt{3})^2 + A_1(1/\sqrt{3})^2 = 2/3 = \int_{-1}^{1} t^2 dt = 2/3,$$

pelo que a fórmula também é exacta para polinómios de grau 2. Além disso, temos

$$Q(t^3) = A_0(-1/\sqrt{3})^3 + A_1(1/\sqrt{3})^3 = 0 = \int_{-1}^{1} t^3 dt = 0;$$

logo, a fórmula também é ainda exacta para polinómios de grau 3. Contudo,

$$Q(t^4) = A_0(-1/\sqrt{3})^4 + A_1(1/\sqrt{3})^4 = 2/9 \neq \int_{-1}^{1} t^4 dt = 2/5.$$

Ou seja, quadratura não é exacta para t^4. Conclui-se assim que a quadratura $Q(f)$ tem grau 3.

(c) Usando a quadratura $Q(f)$, com $x = 1$, calcule $\int_{-1}^{1}(t+1)^2 dt$. Sem calcular o valor exacto do integral, determine o erro da aproximação obtida.

Resolução. Comecemos por observar que, no caso de $x = 1$ a quadratura considerada coincide com a regra dos trapézios simples (dois nós de integração nos extremos do intervalo). Sendo $f(t) = (t+1)^2$, temos

$$Q(f) = f(-1) + f(1) = 0 + 4 = 4.$$

Para calular o erro, usemos a fórmula do erro do método dos trapézios. Verifica-se que $f''(t) = 2$, $\forall t \in I\!R$. Além disso, $h = b - a = 2$ (comprimento do intervalo de integração). Sendo assim, obtém-se

$$E_T(f) = -h^2/12(b-a)f''(\xi) = -4/3.$$

O erro absoluto é 4/3.

3. Considere o seguinte problema de valor inicial para uma equação diferencial de 1ª ordem:

$$y'(x) = \frac{x + y(x)}{x - y(x)}, \qquad y(0) = 1.$$

Para aproximar a solução deste problema, foram utilizados métodos numéricos com as seguintes fórmulas:

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{x_k + y_k}{x_k - y_k}, \tag{1}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(\frac{x_k + y_k}{x_k - y_k} + \frac{(x_{k+1} + y_k)(x_k - y_k) + h(x_k + y_k)}{(x_{k+1} - y_k)(x_k - y_k) - h(x_k + y_k)}\right). \tag{2}$$

(a) Diga, justificando, a que método corresponde cada uma das fórmulas. Qual a ordem de cada um dos métodos?

Resolução. Aplicando o método de Euler à equação diferencial considerada, obtém-se:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) = y_k + h\frac{x_k + y_k}{x_k - y_k}.$$

Logo, o método (1) é o método de Euler (método de 1ª ordem).

Quanto ao método 2, no segundo membro da sua fórmula entram os valores de x_k e x_{k+1}, o que sugere que se trata do método dos trapézios (ou de Heun), que é um método de segunda ordem. De facto, aplicando este método à equação considerada, obtém-se

$$
\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_k + \tfrac{h}{2}\left(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_k + hf(x_k, y_k))\right) = \\
&= y_k + \tfrac{h}{2}\left(\tfrac{x_k+y_k}{x_k-y_k} + \tfrac{x_{k+1}+y_k+h\frac{x_k+y_k}{x_k-y_k}}{x_{k+1}-y_k-h\frac{x_k+y_k}{x_k-y_k}}\right) = \\
&= y_k + \tfrac{h}{2}\left(\tfrac{x_k+y_k}{x_k-y_k} + \tfrac{(x_{k+1}+y_k)(x_k-y_k)+h(x_k+y_k)}{(x_{k+1}-y_k)(x_k-y_k)-h(x_k+y_k)}\right).
\end{aligned}
$$

Assim se confirma que o método 2 é o método dos trapézios.

(b) Usando o método (1) com passo 0.15, determine um valor aproximado de $y'(0.3)$.

Resolução. Para aplicar o método de Euler ao problema considerado, comecemos por definir os pontos da rede. Temos $x_0 = 0$ e, como $h = 0.15$, conclui-se que precisamos de mais dois pontos: $x_1 = 0.15$ e $x_2 = 0.3$. Temos, pois, que efectuar dois passos do método: no primeiro passo, obtém-se um valor aproximado de $y(0.15)$ e, no segundo passo, um valo aproximado de $y(0.3)$.

Primeiro passo:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 - 0.15 = 0.85.$$

Segundo passo:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0.85 - \frac{0.15}{0.7} = 0.6357.$$

Finalmente, o que nos pedem é um valor aproximado de $y'(0.3)$. De acordo com a equação diferencial,

$$y'(0.3) = f(0.3, y(0.3)) \approx f(0.3, y_2) = \frac{0.3 + 0.6357}{0.3 - 0.6357} = -2.7873.$$