

Instituto Superior Técnico  
**Teste de Matemática Computacional 30/04/2008**  
Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial  
**Apresente todos os cálculos que efectuar**

I

Problema: a soma do quadrado de um número com a sua raiz quadrada é igual a 1. Com o objectivo de saber qual é o número, responda às seguintes questões.

1. Mostre que este problema tem uma única solução no intervalo  $[0, 1]$ . (2.0)
2. Considere as seguintes funções:

$$g_1(x) = x - \frac{(1 - x^2)^2 - x}{-4x(1 - x^2) - 1}, \quad g_2(x) = (1 - x^2)^2$$

Mostre que ambas estas esta funções têm como ponto fixo a solução do problema. (2.0)

3. Justifique que a função  $g_1$  é a função iteradora do método de Newton, quando aplicado à resolução deste problema. Sendo  $x_0 \in [0.5, 0.55]$ , mostre que o método converge. (2.0)
4. Tomando como aproximação inicial  $x_0 = 0.55$ , efectue uma iteração do método associado à função  $g_1$  e obtenha uma estimativa do erro de  $x_1$ . (2.0)

Responda **apenas a uma** das duas seguintes questões:

5. O que entende por coeficiente assintótico de convergência de um método iterativo? Determine aproximadamente o coeficiente assintótico de convergência do método associado à função  $g_1$  (tome como valor aproximado da raiz o valor obtido na alínea anterior). (2.0)
6. Se utilizar  $g_2$  como função iteradora e a mesma aproximação inicial, o método do ponto fixo converge? Justifique. (2.0)

II

Considere o sistema de quações não lineares:

$$\begin{cases} x/y + y/z = 2 \\ x^2 + yz + z^2 = 3 + \epsilon \\ \cos(x - 1) + \text{sen}(y - 1) + z = 2 - \epsilon, \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\epsilon \neq 0$ .

1. Ao aplicar o método de Newton à resolução deste sistema, usando a aproximação inicial  $x^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ , obtém-se o sistema linear  $Ax = b$  onde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que a matriz  $A$  tem a forma indicada e calcule o vector  $b$ . (3.0)

2. Quando se factorizou a matriz  $A$ , obteve-se uma matriz triangular da forma

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtenha a matriz triangular inferior ( $L$ ) que completa a factorização. (2.0)

3. Utilizando a factorização a que se refere a alínea (2), resolva o sistema linear  $Ax = b$  da alínea (1) e obtenha a primeira iterada do método de Newton, aplicado ao sistema (1). (Se não resolveu a alínea (1), considere que o vector  $b$  é da forma  $b = (0, 0, a)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ). (2.5)
4. Com o objectivo de resolver o sistema  $Ax = b$  pelo método de Jacobi, trocou-se a ordem da segunda e terceira linhas da matriz  $A$ . Mostre que, nesse caso, o método de Jacobi converge. (2.5)