**Trabalho de Matemática Computacional**
**Licenciatura em Engenharia e Gestão Industrial**
**2o. Sem. 2007/2008**

# Versão 2

Um indivíduo contrai uma dívida ao Banco no valor de $D_0$, com uma taxa de juro $J$. Para liquidar essa dívida deverá pagar anualmente uma prestação no valor de $A_n, n = 0, 1, 2, \ldots$. Neste caso, o valor da dívida ao fim de $n + 1$ anos ($D_{n+1}$) pode calcular-se através da fórmula de recorrência

$$D_{n+1} = D_n(1 + J) - A_n. \tag{1}$$

Admitindo que as prestações são crescentes com uma taxa de crescimento $T \neq J$, verifica-se

$$A_n = A_0(1 + T)^n, \tag{2}$$

onde $A_0$ é o valor da primeira prestação.

Sabe-se que neste caso o valor de $D_n$ satisfaz a equação:

$$D_n = (D_0 - \frac{A_0}{J - T})(1 + J)^n + \frac{A_0}{J - T}(1 + T)^n. \tag{3}$$

1. Escreva um programa que dados os valores de $D_0$, $A_0$ , $J$,$T$ e $n$ permita calcular o valor da dívida $D_n$ através das fórmulas (1) e (2). Para verificar a exactidão dos resultados compare com os que se obtêm pela fórmula (3).

2. Utilizando o programa referido na alínea anterior e o **método da bissecção** , escreva um algoritmo que lhe permita determinar (com erro relativo inferior a $10^{-6}$) quanto deve ser a primeira prestação para que a dívida fique totalmente liquidada ao fim de 20 anos. Resolva o problema para os seguintes casos:(i) $D_0 = 10000, J = 0.05, T = 0$; (ii) $D_0 = 10000, J = 0.05, T = 0.02$. Para cada caso, trace o gráfico de $D_n$ como função de $n$.

   *Sugestão:* comece por provar que o problema tem uma única solução no intervalo $[0, D_0]$.

3. Representemos por $S_n$ a soma das primeiras $n$ prestações pagas. Então

   $$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} A_i = \frac{(1 + T)^n - 1}{T} A_0. \tag{4}$$

   Escreva um programa que lhe permita determinar $A_0$ e $n$, conhecendo $S_n$, $D_0$, $T$ e $J$. Apresente a solução (com erro relativo não superior a $10^{-6}$), para o caso de $S_n = 10000$, $D_0 = 5000$,$J = 0.07$ e $T = 0.02$. (Nota: no caso de a solução para $n$ não ser um número inteiro, pode-se considerar que a última prestação foi inferior às outras).

   *Sugestão:*Resolva cada uma das equações (4) e (3) em ordem a $A_0$ e iguale as expressões obtidas. Resolvendo a equação resultante através do *método de Newton*, obtenha o valor de $n$.

4. Comparando os erros das sucessivas iteradas, determine experimentalmente a ordem de convergência do método de Newton neste exemplo.

   **OBS:** Como não se conhece a solução, para calcular os quocientes $\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}$, $k = 1, 2, \ldots, K - 1$, toma-se a aproximação final $x_{K+1}$ como sendo $n$ ($n = x_{K+1}$).