Exercícios de
MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

1^o Semestre 2008/2009

Capítulo II
Resolução Numérica de Equações Não-Lineares

Método da Bissecção

1. Considere a equação $\sin x - e^{-x} = 0$.

   (a) Prove que esta equação tem uma e uma só raiz $z \in [0.5, 0.7]$.

   (b) Efectue três iterações pelo método da bissecção e indique um majorante do erro dessa aproximação.

   (c) Determine o número m de iterações necessárias para garantir $|z - x_m| < 10^{-6}$.

2. Use o método da bissecção para aproximar, com erro inferior a 10^{-6}, a raiz da equação

$$e^x - \sin x = 0.$$

   mais próxima de zero.

Método do Ponto Fixo

3. Considere a função de variável real

$$g(x) = \frac{1 + e^x + x^3}{14}.$$

   e a sucessão numérica $\{x_m\}$ definida por $x_{m+1} = g(x_m), m = 0, 1, ...$

   (a) Mostre que esta sucessão tem limite $z \in [0, 1]$, independente de $x_0 \in [0, 1]$.

   (b) Partindo de $x_0 = 0$, calcule x_5 e determine um majorante de $|z - x_5|$.

(c) Verifique que a função g tem um (único) ponto fixo no intervalo $[2,3]$. Poder usar, para a sua determinação, o método iterativo baseado na função iteradora g?

4. Considere a iteração do ponto fixo

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, ...$$

com função iteradora $g(x) = 1 + \arctan(x)$.

(a) Indique um intervalo em que as condições do teorema do ponto fixo sejam válidas para a função g.

(b) Aproxime o ponto fixo de g com erro inferior a 10^{-6}. Qual a ordem de convergência da iteração?

5. Calcule um valor aproximado de $\sqrt{10}$ usando o seguinte método numérico

$$x_{m+1} = \frac{30x_m + x_m^3}{10 + 3x_m^2}.$$

Mostre que a ordem de convergência deste método é 3.

6. Pretende-se determinar uma raiz da equação $x = \phi(x)$ pelo método do ponto fixo com um erro absoluto inferior a 0.5×10^{-4}. Suponha que foram obtidas as iteradas

$$x_4 = 0.43789 \qquad\qquad x_5 = 0.43814$$

Sabendo que $|\phi'(x)| \leq 0.4$, determine o número de iterações que tem ainda de se efectuar até atingir a precisão pretendida.

7. Considere a equação

$$e^x - 4x^2 = 0 \tag{1}$$

que tem apenas três raízes reais: $z_1 < z_2 < z_3$, tal que $z_1 \in [-1, 0]$, $z_2 \in [0, 1]$ e $z_3 \in [4, 5]$.

(a) Para aproximar as raízes positivas da equação (**??**), considere-se o método do ponto fixo com função iteradora

$$g(x) = \frac{1}{2}\, e^{x/2}$$

i. Mostre que z_2 e z_3 são pontos fixos de g.

ii. Mostre que o método iterativo associado a g converge para z_2, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [0, 1]$.

(b) Mostre que não é possível usar esse método para obter uma aproximação da raiz $z_3 \in [4, 5]$.

(c) Determine uma função iteradora tal que o método do ponto fixo associado convirja para a raiz negativa da equação.

8. Seja $\varphi \in C([0, 1])$. Considere a equação $2x\varphi(x^2) = \varphi(x)$.

   a) Mostre que a equação admite pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$. (*Sugestão*: aplique o Teorema de Rolle à função $F(x) = \int_x^{x^2} \varphi(u)\, du$)

   Seja $\varphi(x) = e^x$ e $g(x) = \frac{\varphi(x)}{2\varphi(x^2)}$.

   b) Mostre que o método do ponto fixo, com a função iteradora g e qualquer $x_0 \in [0, 1]$, converge para a única raiz da equação dada.

   c) Efectue duas iterações com $x_0 = 1/2$ e majore $|z - x_2|$.

   d) Justifique a convergência linear do método.

`TESTE, LEAmb 05/04/2003`

9. Considere uma sucessão de números reais, definida do seguinte modo:

$$x_0 = 1, \qquad x_{k+1} = 1 - \frac{1}{bx_k}, \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

   onde b é um n£mero real dado.

   a) Com base no teorema do ponto fixo, mostre que, se $b > 4$ esta sucessão converge e que todos os seus termos estão compreendidos no intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$.

   b) Seja $b = \frac{25}{4}$. Através da definição de ponto fixo, calcule $z = \lim_{k\to\infty} x_k$.

   c) Para o mesmo valor de b, mostre que todos os termos da sucessão pertencem ao intervalo $[\frac{4}{5}, 1]$ e que se verifica

$$|z - x_{k+1}| \leq \frac{4}{75}\left(\frac{1}{4}\right)^k \qquad (k = 0, 1, \dots)$$

10. Considere a equação

$$3x^2 - e^x = 0$$

   a) Localize graficamente as raízes da equação e indique intervalos de comprimento unitário que as contenham.

b) Considere as seguintes sucessões

$$(S_1) \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{e^{x_n}}{3}} \qquad\qquad (S_2) \quad x_{n+1} = \ln(3x_n^2).$$

Mostre que é possível obter aproximações das raízes positivas da equação usando, para cada raiz, uma destas sucessões. Indique, em cada caso, um intervalo onde poderá escolher a iterada inicial x_0.

c) Efectue duas iterações usando a sucessão S_1 com $x_0 = 1$. Dê um majorante para o erro da aproximação obtida.

d) Será possível usar a sucessão S_1 para aproximar a maior raiz positiva da equação? E poderá usar a sucessão S_2 para aproximar a menor raiz positiva da equação?

11. Seja a função

$$g(x) = \frac{1}{3}\ln(x^2 + 1)$$

a) Prove que a sucessão definida por $x_{n+1} = g(x_n)$ (para $n = 0, 1, \dots$), converge para um número real $z \in [-1, 1]$. Determine z e a ordem de convergência do método.

b) Efectue algumas iterações, começando com $x_0 = 1$ e calcule os quocientes $\frac{|e_i|}{(e_{i-1})^2}$. Os resultados parecem estar de acordo com o que provou na alínea anterior?

12. Considere a equação

$$x^3 - x = \frac{1}{4}\cos(x).$$

a) Com base nos teoremas sobre localização de raízes mostre que esta equação tem no máximo 3 raízes reais.

b) Mostre que a equação considerada tem duas raízes reais z_1 e z_2 situadas, respectivamente, nos intervalos $[-0.5, -0.2]$ e $[1.0, 1.5]$, e que existe apenas uma raiz em cada um destes intervalos.

c) Considere as funções iteradoras

$$g_1(x) = x^3 - \frac{1}{4}\cos(x) \qquad g_2(x) = (x + \frac{1}{4}\cos(x))^{1/3}.$$

Se partirmos da aproximação inicial $x_0 = 0.5$ e aplicarmos cada uma das funções iteradoras obtemos sucessões que convergem para cada uma das raízes consideradas na alínea anterior. Diga qual das funções corresponde a cada uma das raízes e justifique, com base no teorema do ponto fixo.

d) Indique uma nova função iteradora que permita obter aproximações de cada uma das raízes consideradas, de tal modo que a convergência das respectivas sucessões seja quadrática. `EXAME, LEIC 29/01/2004`

13. Considere a iteração do ponto fixo $x_{m+1} = g(x_m)$, $m = 0, 1, \ldots$, com as funções iteradoras

$$g_1(x) = 1 + \arctan(x), \quad g_2(x) = \frac{x(x^2+6)}{3x^2+2}$$

a) Para cada um dos pontos fixos de g_1 e de g_2 procure um intervalo em que as condições do teorema ponto fixo sejam válidas.

b) Aproxime os pontos fixos de g_1 e de g_2 com um erro absoluto inferior a 10^{-6}. Determine a ordem de convergência para cada um dos métodos.

14. Considere o seguinte método iterativo

$$x_0 \in \mathbb{R}, \quad x_{m+1} = \frac{\alpha x_m + 1 + 2e^{-x_m}}{2+\alpha}, \quad m = 0, 1, \ldots$$

com $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \{-2\}$.

a) Mostre que para todo o $\alpha \in [0, 1]$ o método converge para a solução da equação

$$f(x) = e^x - 2xe^x + 2 = 0$$

qualquer que seja $x_0 \geq 0$.

Sugestão: Utilize o teorema do ponto fixo no intervalo $[0, \max\{2, x_0\}]$.

b) Determine o valor de α de tal modo que a convergência seja a mais rápida possível.

c) Aplique o método para aproximar a solução da equação $f(x) = 0$ com um erro inferior a 10^{-5}.

15. Considere a função real

$$f(x) = 2x - \cos(x).$$

a) Mostre que a equação $f(x) = 0$ possui uma só raiz α no intervalo $(0, \pi/4)$ e calcule-a com erro inferior a 0.25. Justifique.

b) Mostre que o processo iterativo

$$x_{n+1} = \frac{\cos(x_n)}{2} \qquad n = 0, 1, \ldots$$

converge para um número α, independentemente da escolha que fizer de $x_0 \in (0, \pi/4)$. Dê uma estimativa do coeficiente assimptótico de convergência. A convergência é monótona? Justifique.

c) Faça $x_0 = \pi/8$. Calcule um majorante para x_{16}.

`EXAME, LEIC 15/12/2001`

Método de Newton

16. Pretende-se determinar, utilizando o método de Newton, a maior das duas raízes positivas da equação

$$-x^3 + 14x - 1 - e^x = 0.$$

(a) Mostre que se x_0 for escolhido no intervalo [2.6,3], estão asseguradas as condições de convergência do método.

(b) Efectue três iterações do método de Newton e determine um majorante do erro de x_3.

(c) Sem efectuar iterações, calcule um majorante para o erro da quinta iterada.

17. Utilize o método de Newton para aproximar a (única) raiz da equação

$$x^3 - \cos x = 1,$$

no intervalo $[1, 2]$. Escolha o valor $x_0 = 1$ para iterada inicial e calcule as iteradas x_1 e x_2. Quantas iteradas teria ainda que calcular para obter uma aproximação da raiz com erro inferior a 10^{-9}?

18. Considere o seguinte método para obter um valor aproximado de $\sqrt{10}$:

a) O método de Newton aplicado à função $f_1(x) = x^2 - 10$. Mostre que se escolher $x_0 = 4$ então o método converge e a convergência é da ordem 2. Calcule 3 iteradas e indique um majorante para o erro de x_3. O que acontece se escolher $x_0 > 4$?

b) O método de Newton aplicado a função $f_2(x) = x^{-1/2}(x^2 - 10)$. Admitindo que o método converge mostre que a ordem de convergência é 3.

19. Mostre que a equação $\ln(x) - (x-2)^2 = 0$ tem 2 e só 2 raízes reais distintas e indique, para cada uma delas, um intervalo (de comprimento não superior a 2) que a contenha (sem conter a outra). Se pretendesse utilizar o método de Newton para calcular a raiz mais pequena, diga, justificando, qual (ou quais) dos seguintes valores poderia utilizar como aproximação inicial: $x_0 = 2.1$, $x_0 = 2.5$ ou $x_0 = 1.4$? Mostre que para o x_0 que escolheu estão garantidas as condições de convergência do método e efectue uma iteração.

20. Considere o método de Newton para aproximar a raiz $z_3 \in [4, 5]$ da equação
$$e^x - 4x^2 = 0$$
(ver problema 7).

    (a) Prove que está assegurada a convergência do método de Newton, qualquer que seja a aproximação inicial $x_0 \in [4.1, 4.4]$. Determine ainda a ordem de convergência do método.

    (b) Partindo de $x_0 = 4.1$, calcule x_1. Sem efectuar mais iterações, determine um majorante para $|z_3 - x_2|$.

Método da Secante

21. Considere a equação
$$x\tan(x) - 1 = 0.$$
Aplicando o método da secante, obtenha as três primeiras iteradas para o cálculo da raiz situada no intervalo $[0.8, 0.9]$. Determine um majorante do erro do resultado obtido.

22. Considere a equação
$$e^x = 2 - x^2.$$

    (a) Prove que a equação tem uma única raiz no intervalo $]0.5, 1.0[$. Por bissecção determine um sub-intervalo I que contenha a raiz.

    (b) Escolha duas iteradas iniciais x_{-1} e x_0 de modo a que se possa aplicar o método da secante para aproximar a raiz em I e calcule a iterada seguinte x_1.

    (c) Indique um majorante do erro absoluto da iterada x_2 que tenha em conta os valores encontrados na alínea anterior.

23. Para obter um valor aproximado da raiz cúbica de um número real a, pretende-se utilizar o método da secante.

    a) Escreva a fórmula iteradora do método para um valor de a arbitrário.

    b) Considere o caso de $a = 2$. Tomando como aproximações iniciais $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ verifique que as condições de convergência do método estão satisfeitas e efectue iterações até obter uma aproximação com três algarismos significativos.

Vários Métodos

24. Considere a equação

$$f(x) = \cos(x) - x = 0.$$

    (a) Mostre que o método de Newton converge para o único zero de f, qualquer que seja a iterada em $[0.5, 1.5]$.

    (b) Calcule a primeira iterada x_1 começando com $x_0 = 1$ e justifique que $|e_1| \leq 0.025$.

    (c) Calcule x_3 e apresente uma estimativa de erro.

    (d) Com base nos valores x_0 e x_1 obtido em b) calcule x_2 pelo método da secante. Este método também irá convergir?

25. Considere a função

$$f(x) = 2\ln(x^2+1) - x^2 + \frac{1}{1+x^2}.$$

    Aproxime, com erro inferior a 10^{-4}, todas as raizes da equação $f(x) = 0$.

26. Sabendo que $h(x)$ e $h'(x)$ são crescentes, diferenciáveis, e que h tem uma raiz no intervalo $I = [-1, 1]$, pretende-se determinar a raiz da equação:

$$F(x) = x + h(x) = 0$$

    usando o seguinte método:

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})F(x_n)}{F(x_n) - F(x_{n-1})}.$$

    Verifique que F tem uma única raiz em I e que existem valores a e b para os quais o método converge. Que pode dizer relativamente à ordem de convergência?

    `EXAME, LEC 22/07/1996`

27. Seja g uma função contínua tal que $g(a) = b$ e $g(b) = a$.

a) Mostre que existe pelo menos um ponto fixo de g em $[a, b]$.

b) Mostre que se $g \in C^1([a, b])$ então a derivada de g toma o valor -1 em algum ponto desse intervalo. Poderá aplicar o teorema do ponto fixo à função g no intervalo $[a, b]$?

28. Considere a função

$$f(x) = \cos(\frac{x}{2}) - x$$

a) Mostre que o método de Newton converge quadraticamente para o único zero de f, qualquer que seja a iterada inicial em $[0.5, 1.5]$.

b) Calcule a primeira iterada x_1 começando com $x_0 = 1$ e justifique que $|e_1| \leq 0.025$.

c) Use uma estimativa baseada na fórmula de Lagrange para calcular outro majorante para x_1 da alínea b). Comente.

d) Calcule x_3 e apresente uma estimativa para o erro.

e) Com base nos valores x_0 e x_1 obtido em b) calcule x_2 pelo método da secante. Este método também irá convergir?