Exercícios de
MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

1^o Semestre 2006/2007

Capítulo III
Resolução Numérica de Sistemas de Equações

1 Normas, Erros e Condicionamento

1. Seja:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^{-6} \end{bmatrix}$$
e considere o sistema $Ax = b$, com $b = [1 \quad 10^{-6}]^\top$, que tem por solução exacta $x = [1 \quad 1]^\top$.

   a) Determine $cond(A)$ na $\|\|\|_\infty$.

   b) Considere o sistema $A\tilde{x} = \tilde{b}$, onde $\tilde{b} = [1 + \varepsilon \quad 10^{-6}]^\top$. Obtenha $\|\delta_b\|_\infty$ e $\|\delta_x\|_\infty$ e comente.

   c) Considere ainda $\tilde{b} = [1 \quad 2 \times 10^{-6}]^\top$. Obtenha $\|\delta_b\|_\infty$ e $\|\delta_x\|_\infty$ e comente.

2. Seja A a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ com inversa } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
onde $a \in \mathbb{R}$.

   a) Calcule os números de condição associado à norma $\|.\|_\infty$ e à norma $\|.\|_1$.

   b) Mostre que $cond_1(A) = cond_\infty(A)$.

   c) Seja $|a| > 1$. Suponhamos que, ao resolver o sistema $Ax = b$, o segundo membro é afectado de um ero tal que $\|\delta b\|_\infty \leq \varepsilon$. Determine um majorante de $\|\delta x\|_\infty$.

   d) Para que valores de a o sistema é mal condicionado?

3. Considere o seguinte sistema linear na forma geral

$$\begin{bmatrix} p & a \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$$

onde $p, a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss. Em que condições o valor de x pode ser afectado por erros numéricos grandes?

4. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ e verifique que } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+a^2} & 0 & -\frac{a}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{a}{1+a^2} & 0 & \frac{1}{1+a^2} \end{bmatrix}$$

a) Calcule as normas $\|.\|_\infty$ e $\|.\|_1$ da matriz A.

b) Calcule $cond_\infty(A)$ e $cond_1(A)$. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ há mau condicionamento da matriz ?

c) E se considerar $a \in \mathbb{C}$?

5. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ a & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

onde $a \in \mathbb{R}, a \neq 3$. Suponhamos que, ao resolver o sistema $Ax = b$, com um certo valor de a, se obteve a solução $x = (1, 1, 1)$. Determine um majorante de $\|\Delta x\|_\infty$, onde Δx é a diferença entre esta solução e a que se obteria se o valor de a fosse afectado de um certo erro, de valor absoluto não superior a ε (sendo $\varepsilon < |a - 3|$).

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 0.00005 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine o número de condição da matriz A na norma $||.||_1$;

(b) Ao resolver um sistema com a matriz A, sabendo-se que o segundo membro é afectado por um erro cuja norma, em termos relativos, satisfaz $\|\delta b\|_1 \leq \epsilon$, determine um majorante da norma correspondente do erro relativo da solução .

7. Seja A_n uma matriz quadrada, de dimensão n, com a forma:

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Utilize o sistema *Matlab* ou *Mathematica* para resolver as seguintes questões. a) Implemente rotinas que, para qualquer n, lhe permitam construir a matriz A_n e a sua inversa.

   b) Escreva rotinas que lhe permitam calcular a norma 1 ou a norma ∞ duma matriz dada.

   c) Com base nas alíneas anteriores, deduza fórmulas para calcular $\|A_n^{-1}\|_\infty$ e $\mathrm{cond}_\infty(A_n)$. Que conclusão pode tirar sobre o condicionamento de A_n?

   d)Considere o sistema linar $A_n x = b$. Seja $\tilde{b}$ um valor perturbado de b, tal que $\|\delta_b\|_\infty \leq 2^{-n}$. Determine um majorante para $\|\delta_x\|_\infty$. Comente.

2 Métodos Directos

1. Mostre que se a matriz A for tridiagonal, isto é se se verificar $a_{ij} = 0$, se $|i-j| > 1$, então as matrizes L e U da sua factorização pelo método de Crout satisfazem as condições

$$\begin{aligned} l_{ij} &= 0, \quad se\ i < j\ ou\ i > j+1; \\ u_{ij} &= 0, \quad se\ i > j\ ou\ i < j+1. \end{aligned}$$

2. Considere a matriz quadrada de ordem n com a forma geral

$$A_n = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 3 & 10 & 3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 3 & 10 & 3 \\ 0 & \dots & 0 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

   (a) Obtenha a forma geral da factorização de Crout desta matriz.

   (b) Com base na factorização obtida, calcule $DetA_n$.

   (c) Resolva o sistema $A_n\,x = b_n$, onde $b_n = (0, 0, ..., 1)^T$.

(d) Prove que esta matriz é definida positiva e determine a sua factorização de Cholesky.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -3/2 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Obtenha a factorização de Crout da matriz A.

(b) Usando a factorização anterior, resolva o sistema $Ax = b$, em que

$$b = [13500, 11250, 12000, 4250]^T.$$

4. Considere o sistema $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(a) Mostre que A se pode decompôr na forma $A = LL^T$, com L triangular inferior e determine a matriz L.

(b) Usando a decomposição anterior, resolva o sistema $Ax = b$.

3 Métodos Iterativos para Sistemas Lineares

1. O sistema de equações lineares $Ax = b$,

$$\begin{bmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{bmatrix} x = b$$

pode, sob certas condições, ser resolvido pelo método iterativo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -wa & 1 \end{bmatrix} x^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 1-w & wa \\ 0 & 1-w \end{bmatrix} x^{(k)} + wb$$

a) Para que valores de a o método converge se $w = 1$?

b) se $a = -1/2$ e $w = 1/2$ o método converge?

2. Considere um sistema de duas equações na forma geral

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

onde $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

a) Mostre que os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para qualquer aproximação inicial $x^{(0)}$ se e só se $|m| < 1$, onde $m = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}}$.

b) No caso do método de Jacobi, mostre que se a matriz do sistema tiver a diagonal estritamente dominante por linhas, se verifica

$$\|x^{(k+1)} - x\|_\infty \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty$$

onde x é a solução exacta do sistema, $x^{(k)}$ é a k-ésima iterada e $\alpha = \max(\frac{|a_{12}|}{|a_{11}|}, \frac{|a_{21}|}{|a_{22}|})$.

c) Considere o sistema

$$\begin{cases} 3x + y = 8 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

Efectue a primeira iteração do método de Jacobi, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (2, 1)$. Com base na alínea anterior determine um majorante para o erro do resultado obtido.

d) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para garantir que seja satisfeita a condição $\|x^{(k)} - x\|_\infty < 0.001$?

3. Considere o sistema $Ax = b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 10 & 8 \\ 2 & -7 & -10 \\ 10 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ -23 \\ 34 \end{bmatrix}$$

a) É possível reordenar as linhas do sistema de modo que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel sejam convergentes? Justifique.

b) Escreva o sistema na forma iterativa e calcule $x^{(2)}$, considerando o método de Gauss-Seidel com $x^{(0)} = (1, 1, 1)$.

c) Determine um majorante para $\|x - x^{(2)}\|_\infty$.

4. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x+z & = & 2 \\ -x+y & = & 0 \\ x+2y-3z & = & 0 \end{cases}$$

a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste problema, qualquer que seja a aproximação inicial.

b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não esta garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $x^{(0)}$, partindo de qual o método divirja.

5. Considere o sistema linear $Ax = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Verifique que este sistema pode ser resolvido por um método iterativo da forma $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + d$. Identifique a matriz C e o vector d. Se $x^{(0)} = (0,0,0,0)$ estime o erro $\|x - x^{(k)}\|_\infty$.

6. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1+\cos(\theta) \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

a) Mostre que os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel convergem para a solução do sistema $Ax = b$ (com $b \in \mathbb{R}^3$ qualquer), dado $x^{(0)} = (0, -212, 10^5)$.

b) Estabeleça uma estimativa de erro para o método de Jacobi, efectuando a primeira iterada com $x^{(0)} = (10^5, 10^6, 0)$.

c) Ao fim de quantas iterações n é possível garantir um erro $\|e_n\|_\infty \leq 10^{-6}$.

7. Considere a matriz da forma

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \alpha \\ \beta & -\beta & -\alpha \\ \beta & -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

onde $0 < \beta < \alpha$.

a) Mostre que, qualquer que seja a iterada inicial, o método de Jacobi converge e o método de Gauss-Seidel não converge para a solução de um sistema $Ax = b$.

b) Considere $\beta = 1,\ \alpha = 2$ e $b = (0, 0, 0)$. A solução única do sistema $Ax = b$ será $x = (0, 0, 0)$.

(i) Mostre que, qualquer que seja $x^{(0)}$, ao fim de três iterações obtemos a solução exacta pelo método de Jacobi. (Verifique que a matriz C associada ao método de Jacobi stisfaz $C_j^3 = 0$.)

(ii) Mostre que se começar com $x^{(0)} = (0, 2, 1)$, aplicando o método de Gauss-Seidel, obtém $x^{(1)} = (0, -2, -1)$, $x^{(2)} = (0, 2, 1)$, $x^{(3)} = (0, -2, -1), \ldots$. Verifique que $(0, 2, 1)$ é um vector próprio associado ao valor próprio -1 da matriz C (do método de Gauss-Seidel) e não é solução do sistema.

8. Considere o sistema linear $Ax = b$ com

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \omega & 0 \\ 1 & 2 & 2\omega \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$.

a) Mostre que tanto o método iterativo de Jacobi como o de Gauss-Seidel convergem para a solução deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial $x^{(0)} \in \mathbb{R}^3$, se e só se $|\omega| < \frac{4}{3}$. Prove também que o método de Gauss-Seidel converge mais rapidamente, desde que $\omega \neq 0$. Como é que os dois métodos convergem quando $\omega = 0$?

b) Seja $\omega = \frac{1}{2}$ e $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Calcule as três primeiras iteradas pelo método de Gauss-Seidel. Obtenha uma estimativa para o erro $\|x - x^{(3)}\|_\infty$.

c) Determine os valores de ω para os quais a matriz A é definida positiva.

9. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 & + & 10x_2 & + & x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & x_2 & + & 10x_3 & = & 12 \\ 10x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 12 \end{cases}$$

(a) Reordene as linhas de modo a que matriz do novo sistema tenha a diagonal estritamente dominante.

(b) Aplique o método de Jacobi ao novo sistema e efectue 4 iterações. Calcule um majorante para o erro na 4ª iterada. Considere $\mathbf{x}^{(0)} = [-4, -4, -4]^T$.

(c) Nas condições da alínea anterior, quantas iterações do método de Jacobi são necessârias para garantir que seja satisfeita a condição $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}||_\infty < 0.001$?

(d) Aplique o método de Gauss-Seidel até que $||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_\infty < 10^{-2}$. Conclua sobre o erro da iterada $\mathbf{x}^{(k)}$.

10. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + z & = & 2 \\ -x + y & = & 0 \\ x + 2y - 3z & = & 0 \end{cases}.$$

(a) Prove que o método de Jacobi converge para a solução exacta deste sistema, qualquer que seja a aproximação inicial.

(b) Mostre que, no caso de se usar o método de Gauss-Seidel, não está garantida a convergência para qualquer aproximação inicial. Indique uma aproximação inicial $x^{(0)}$ (diferente da solução exacta), tal que a sucessão $\{x^{(k)}\}$ seja convergente; e uma aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)}$, partindo da qual o método divirja.

11. Pretende-se resolver um certo sistema $Ax = b$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz triangular superior, partindo de uma aproximação inicial arbitrâria.

(a) Se aplicarmos o método de Gauss-Seidel, podemos garantir que a solução exacta é obtida com um número finito de iterações . Justifique e diga quantas.

(b) A mesma pergunta, em relação ao método de Jacobi.

4 Métodos Numéricos para Sistemas Não-lineares.

1. Considere o sistema de equações não-lineares:

$$\begin{cases} 2x + y + \varepsilon\cos(z) &= 0 \\ x + 3y - 3\varepsilon xz &= 0 \\ \varepsilon x^2 + y + 3z &= 0 \end{cases}$$

   e o método do ponto fixo com função iteradora:

$$G(x, y, z) = -(y/2 + \varepsilon\cos(z)/2, x/3 - \varepsilon xz, \varepsilon x^2/3 + y/3).$$

   a) Efectue a primeira iteração do método do ponto fixo, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)$.

   b) Efectue a primeira iteração do método de Newton, partindo da mesma aproximação inicial.

2. Considere o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} x^3 + 5y - 2z &= 0 \\ e^y - z^2 &= 1 \\ -x^2 + y + z &= 0 \end{cases}$$

   Para aproximar uma solução deste sistema pretende-se utilizar o método de Newton. Tomando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (c, 0, 0)$, onde c é um certo número real, para obter a aproximação $x^{(1)}$ somos levados a resolver um sistema linear com matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3c^2 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2c & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   a) Mostre como se obteve esta matriz e calcule o segundo membro do sistema.

   b) No caso de $c = 1$ resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss e obtenha a primeira iterada $x^{(1)}$ do método de Newton.

   c) No caso de se aplicar o método de Jacobi para resolver o sistema linear, diga para que valores de c está garantida a condição necessária e suficiente de convergência do método.

3. Considere o sistema não-linear:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - \cos(x+y) = 2 \\ 3y - \sin(x+y) = 6 \end{array} \right.$$

a) Inicializando com $x^{(0)} = (1,1)$ calcule duas iterações pelo método do ponto fixo

b) Efectue o mesmo que em b) usando o método de Newton.

4. Pretende-se resolver pelo método de Newton o sistema de equações não-lineares

$$\left\{ \begin{array}{ccc} e^x - 3 & = & 0 \\ 3y + 4z & = & 3 \\ 2x^2 + 2x + 2z & = & 1 \end{array} \right.$$

a) Tomando como aproximação inicial $(x_0, y_0, z_0) = (0, 1, 2)$, ao efectuar uma iteração pelo método de Newton, somos conduzidos a resolver um certo sistema de equações lineares. Qual?

b) Resolva o sistema de equações lineares obtido na alínea anterior pelo método de Gauss-Seidel, considerando como aproximação inicial o vector nulo e efectuando duas iterações.

5. Considere o sistema de equações

$$\left\{ \begin{array}{l} x - y\cos(x)/4 = 0 \\ 1 - y + |x - 1| = 0 \end{array} \right.$$

a) Mostre que existe uma e uma só solução $(x, y) \in [0,1] \times [1,2]$.

b) Determine uma aproximação da solução de forma a que o erro absoluto verifique $||e||_\infty < 0.05$.

6. Pretende-se resolver o seguinte sistema de equações não-lineares pelo método de Newton

$$\left\{ \begin{array}{ccc} x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 & = & -3 \\ 4x_1 + x_2^3 + x_3 & = & 2 \\ x_1 x_3 + 5x_2 & = & 3 \end{array} \right.$$

usando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (1, 0, -1)$.

a) Mostre que, para se obter $x^{(1)}$, se deve resolver um sistema linear da forma $Av = h$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

e v e h são vectores de $\mathbb{R}^3$. Calcule h.

b) Transforme o sistema linear considerado num sistema equivalente, de modo a que fique garantida a convergência do método de Gauss-Seidel. Depois, tomando como aproximação inicial $v^{(0)} = (-1, -1, -1)$, aplique este método até obter a solução exacta do sistema linear.

c) Obtenha o valor de $x^{(1)}$, a primeira iterada do método de Newton.

`EXAME, LEIC 12/02/2004`

7. Considere o sistema de equações algébricas não-lineares

$$F(x) = 0 \Leftrightarrow x = G(x)$$

onde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \qquad F(x) = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 - 3x_2 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 3x_3 - 1 \end{bmatrix}, \qquad G(x) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} x_2^2 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_3^2 \\ x_1^2 + x_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

a) Obtenha um valor aproximado $x^{(2)}$ para a solução única z do sistema usando duas iterações do método do ponto fixo partindo da condição inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)$. Apresente uma estimativa para o erro $\|z - x^{(2)}\|_\infty$.

b) Mostre que a determinação de um valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$ para a solução z do problema inicial usando uma iterada do método de Newton partindo da aproximação inicial $\tilde{x}^{(0)} = (\alpha, \alpha, 0)$, onde α é uma constante real, conduz a resolução de um sistema linear $Ay = b$, onde

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2\alpha & 0 \\ 2\alpha & -3 & 0 \\ 2\alpha & 2\alpha & -3 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 3\alpha - \alpha^2 \\ 3\alpha - \alpha^2 \\ 1 - 2\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

c) Tomando $\alpha = 1$, resolva o sistema $Ay = b$ da alínea anterior pelo método de eliminação de Gauss e conclua a determinação do valor aproximado $\tilde{x}^{(1)}$.

`EXAME, LEFT 15/07/2003`

8. Considere o método de Newton aplicado à resolução do sistema

$$\begin{cases} (x_1^4 - x_3^2)x_2 + 1 &= 0 \\ (x_1^2 + x_3 + 8b)x_2 &= 3 \\ (3 - 3x_3^2)x_2 + 1/8 &= 0 \end{cases}$$

a) Verifique que, se $x^{(0)} = (1, b, -1)$, então $x^{(1)} = x^{(0)} - h$, sendo h a solução do sistema linear $Ah = b$, em que:

$$A = \begin{bmatrix} 4b & 0 & 2b \\ 2b & 8b & b \\ 0 & 0 & 6b \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 8b^2 - 3 \\ 1/8 \end{bmatrix}$$

b) Justifique que o método de Jacobi, aplicado a $Ah = b$, converge qualquer que seja $h^{(0)}$, se e só se $b \neq 0$. Pode garantir que $h^{(3)}$ seja a solução exacta do sistema $Ah = b$? `TESTE, LEAmb 05/04/2003`

9. Pretende-se resolver pelo método de Newton o seguinte sistema de equações não-lineares

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2(x_3 + 1) &= 10 \\ 3(x_2 + 1) + x_3^2 &= 11 \\ 3x_1 + x_3^2 &= 9 \end{cases}$$

tomando como aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)} = [3, 2, 1]$.

a) Mostre que o sistema $\mathbf{Av} = \mathbf{b}$ a ser resolvido para se obter $\mathbf{x}^{(1)}$ é tal que

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obtenha ainda o vector $\mathbf{b}$.

b) Resolva o sistema linear obtido em a) pelo método de eliminação de Gauss com **pesquisa parcial de pivot**, e obtenha $\mathbf{x}^{(1)}$.

10. Considere o sistema de equações não lineares

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{0.5}{1+(x_1+x_2)^2} \\ x_2 &= \frac{0.5}{1+(x_1-x_2)^2} \end{cases}$$

Mostre que o sistema tem uma única solução e aproxime-a pelo método do ponto fixo. Obtenha uma estimativa do erro para a solução obtida na norma do máximo