Exercícios de MATEMÁTICA COMPUTACIONAL

1^o Semestre 2008/2009

Capítulo IV Aproximação de Funções

1 Interpolação Polinomial

1. Na tabela seguinte sao apresentados valores duma função $f \in C^2(]0, +\infty[)$

x	0.8	1.0	1.6
$f(x)$	1.890	2.000	3.185

   (a) Obtenha a expressao do polinómio interpolador de f nos três pontos tabelados, através da fórmula de Lagrange.

   (b) Idem, mas através da fórmula de Newton.

   (c) Calcule uma aproximação para $f(1.3)$. Obtenha um majorante do erro a partir da expressao do erro de interpolação, admitindo que $f(x) - 1/x$ é um polinómio de grau nao superior a 2.

   Solução:

$$
\begin{aligned}
a)\quad & P_2(x) = \tfrac{(x-1)(x-1.6)}{0.16} 1.89 - \tfrac{(x-0.8)(x-1.6)}{0.12} 2 + \tfrac{(x-0.8)(x-1)}{0.48} 3.185 \\
b)\quad & P_2(x) = 1.89 + 0.55(x-0.8) + 1.78125(x-0.8)(x-1) \\
c)\quad & |f(1.3) - P_2(1.3)| \leq |(1.3-0.8)(1.3-1)(1.3-1.6)| \tfrac{1}{3!} \tfrac{6}{0.8^4}
\end{aligned}
$$

2. Considere a seguinte tabela de valores:

x	-3	-1	1	3
$f(x)$	-33	14	-2	-5

(a) Sabendo que a função tabelada é contínua e estritamente monótona em $[-1,3]$, determine, por interpolação inversa, uma aproximação do zero da função situado no intervalo $[-1,1]$, utilizando o maior número possível de pontos. Justifique a sua escolha.

(b) Obtenha o polinómio interpolador de f nos três últimos pontos. Se determinasse o zero deste polinómio no intervalo $[-1,1]$, obteria o mesmo resultado que na alínea anterior? Justifique.

(c) Suponha que, para $x \geq -1$, a função é da forma

$$f(x) = 3x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

e que $f[-1,1,2] = 4$, escreva, recorrendo ao polinómio interpolador calculado na alínea anterior, uma expressao que permita obter $f(x)$.

Solução:a) Polinómio interpolador inverso:

$$Q(y) = -1 - 0.125(y-14) + \frac{13}{456}(y-14)(y+2); \qquad Q(0) = -0.048.$$

b) Polinómio interpolador :

$$P_2(x) = 14-8(x+1)+1.625(x-1)(x+1); \qquad \text{zero de } P_2: \quad x = 0.6266.$$

c)

$$f(x) = P_2(x) - 2.375(x-1)(x+1)(x-3) + 3(x-1)(x+1)(x-3)(x-2)$$

3. Sejam $l_0(x)$, $l_1(x)$,..., $l_n(x)$ os polinómios de Lagrange de grau n associados aos nós x_0, x_1,..., x_n:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Considere a função

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) - 1$$

Prove que

(a) g é um polinómio de grau $\leq n$.

(b) $g(x_j) = 0$, $j = 0, 1, ..., n$.

(c) $g(x) = 0$, para todo o x.

4. Sejam $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ os polinómios fundamentais de Lagrange para os nós $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ (com $n \geq 1$). Prove que, se $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, entao $\sum_{j=0}^{n} x_j^p l_j(x) = x^p$, $\forall x \in R$.

`EXAME, LEIC 13/02/2003`

5. Pretende-se construir uma tabela de valores da função e^x, para $x \in [0, 1]$, com pontos igualmente espaçados $x_j = jh$, $j = 0, 1, \ldots, N$, onde h é o espaçamento entre os pontos. Em cada subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ a função é aproximada pelo polinómio interpolador de grau ≤ 1 nos pontos x_j e x_{j+1}. Determine o valor máximo do espaçamento h para que o erro de interpolação em qualquer ponto do intervalo $[0, 1]$ seja inferior a 10^{-6}.

6. Considere a função real cujos valores sao dados na seguinte tabela:

x	-2	-1	-0.5	0
$f(x)$	6	2	α	4

(a) Supondo que f é um polinómio de grau 2, obtenha esse polinómio e calcule o valor de α, usando a fórmula de Lagrange.

(b) Utilizando o polinómio obtido na alínea anterior e supondo que f tem a forma $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, calcule de novo o valor de α.

`EXAME, LEIC 29/01/2004`

7. Considere a seguinte tabela de valores da função $f(x) = \log_{10} x$:

x_i	2.0	2.5	3.0
$\log_{10} x_i$	0.30103	0.39794	0.47712

(a) Usando a fórmula de Newton e todos os pontos da tabela, calcular uma aproximação de $f(2.4)$.

(b) Determine um majorante do erro absoluto cometido ao aproximar $f(x)$, pelo método utilizado na alínea anterior, quando $x \in [2, 3]$. Compare com o erro do resultado obtido para $x = 2.4$.

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma função $f(x)$, tal que $f \in C([0, 0.55])$.

x	0.2	0.34	0.4	0.52	0.65	0.72
$f(x)$	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

(a) Obtenha uma aproximação de $f(0.47)$ usando um polinómio interpolador de grau 2. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

(b) Admitindo que $f \in C^3([0,1])$ e que $\max_{x\in[0,1]} f^{(3)}(x) = M$, calcule um majorante para o erro do resultado obtido na alínea anterior.

Solução:

a)Usando os nós de interpolação $x_0 = 0.34, x_1 = 0.4, x_2 = 0.52$:

$$f(0.47) \approx P_2(0.47) = 0.27802$$

b)

$$|f(x) - P_2(x)| \leq M \times 0.758 \times 10^{-4}.$$

9. Seja f uma função que nos nós $\{-1, 1, 3\}$ tem como polinómio interpolador $p_2(x) = 3 - 2x + 6x^2$.

   (a) Sabendo que $f[-1, 1, 2] = 4$, calcule o polinómio p_3 que interpola f nos nós anteriores e também em $x_3 = 2$.

   (b) Sabendo ainda que $f^{(iv)}(x) = 78$, para todo $x \in R$, determine a expressão analítica de f.

10. Suponha que os valores de f calculados nos nós $x_0, ..., x_n$ estão afectados de erro, tendo apenas sido obtidas aproximações $\tilde{f}_0, ..., \tilde{f}_n$. Seja p_n o polinómio interpolador obtido com os valores exactos e $\tilde{p}_n$ o polinómio interpolador obtido com os valores aproximados.

    (a) Mostre que se $|f_k - \tilde{f}_k| \leq \varepsilon$, então $\max_{x\in[x_0,x_n]} |p_n(x) - \tilde{p}_n(x)| \leq C\varepsilon$, em que $C = (n+1) \max_k \max_{x\in[x_0,x_n]} |l_k(x)|$

    (b) No caso de nós igualmente espaçados, e $n = 2$, obtenha $C = \frac{5}{4}$.

11. Sabendo que $f^{(n+1)}[a, b] \subset [a, b]$, mostre que erro de interpolação verifica, para qualquer $x \in [a, b]$,

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \max\{|a|, |b|\} e^{|b-a|}.$$

12. Considere $a \neq 0$ e uma função g para a qual

$$g(0) = a, \quad g(g(0)) = 2a, \quad g(g(g(0))) = b.$$

(a) Determine o polinómio interpolador de g no conjunto de nós $\{0, a, 2a\}$.

(b) Considere b de forma a que g tenha um ponto fixo em $2a$. Mostre que numa vizinhança desse ponto fixo o polinómio interpolador p_2 é contractivo. Determine o outro ponto fixo de p_2 e verifique que num intervalo que inclua esse ponto o polinómio não é contractivo.

13. Seja f uma função de classe C^3 em $[a, b]$ e $p_2(x)$ o polinómio de grau menor ou igual a dois que interpola f nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ e $x_2 = b$. Mostre que:

$$f(x) - p_2(x) \leq \frac{(b-a)^3}{72\sqrt{3}} \max_{y \in [a,b]} f^{(3)}(y), \forall x \in R$$

14. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x	-1	1	4
$f(x)$	2	-2	-8

Sabendo que f é um polinómio e que:

$$f[-1, 1, 2] = 4, \qquad f[-1, 1, 2, 4, x] = 3, \quad \forall x \in R \setminus \{-1, 1, 2, 4\}$$

determine a forma de f.

Solução:

$$\begin{gathered} P_2(x) = 2 - 2(x+1) \\ P_3(x) = P_2(x) - 2(x+1)(x-1)(x-4) \\ f(x) = P_4(x) = P_3(x) + 3(x+1)(x-1)(x-4)(x-2) \end{gathered}$$

15. Considere a tabela de valores

x_i	1	2	3	5	6
f_i	4.75	4	5.25	19.75	36

Calcule um valor aproximado de $f(3.5)$ executando interpolação de Newton, com polinómios de grau um, dois e três. Justifique a escolha dos nós de interpolação em cada um dos casos anteriores. Se f for um polinómio, poderá dizer alguma coisa sobre o seu grau? Justifique.

16. Considere uma função injectiva que toma os valores

$$f(-2) = -1, \qquad f(0) = 1 \qquad e f(1) = 3.$$

Determine o polinómio interpolador para a função inversa nos pontos indicados. Encontre uma aproximação para a raiz da função f usando interpolação inversa.

17. Pretende se calcular uma aproximação do zero z da função

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) - e^{-x}$$

situado no intervalo $[0.5, 1.0]$.

(a) Prove que z é único neste intervalo.

(b) Determine uma aproximação do z por interpolação linear inversa.

(c) Determine uma estimativa para a aproximação calculada na alínea anterior.

18. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	-1	0	1	2
f_i	1	1	1	2

(a) Usando a fórmula de Newton com diferenças divididas, construa o polinómio interpolador de f de grau menor ou igual a 3.

(b) Sabendo que $f'''(x) = 4x - 1$, utilize a alínea anterior para determinar a expressao exacta de f.

19. Seja $f \in C^3[0, 1]$ uma função real.

(a) Mostre que existe um e um só polinómio p de grau ≤ 2 tal que

$$p(0) = f(0) \qquad p(1) = f(1) \qquad \int_0^1 p(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

(b) Supondo que $f'''(x) \leq M,\ \forall x \in [0,1]$, mostre que $\max_{x\in[0,1]} f(x) - p(x) \leq \frac{M}{6}$

20. Esboçe o gráfico do polinómio mónico

$$\psi_{n+1}(t) = \prod_{i=0}^{n} (t-i)$$

no intervalo $[0, n]$ para diferentes valores de n. Verifique que

$$\max_{t\in[0,n]} \psi_{n+1}(t) < n!$$

21. Considere as funçoes

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2}, \qquad g(x) = e^x + e^{-x}, \qquad x \in [-1, 1]$$

(a) Determine o polinómio interpolador de Lagrange de f e de g nos pontos

$$x_i = -1 + 2(i-1)/n, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+1,$$

com $n = 5, 9$ e 13. Compare graficamente os polinómios interpoladores com as funçoes a aproximar. Explique os resultados com base na teoria.

2 Método dos Mínimos Quadrados.

1. Considere a seguinte tabela:

x	1.0	1.2	1.5	1.6
$f(x)$	5.44	6.64	8.96	9.91

   (a) Obtenha o polinómio do primeiro grau que se ajusta (no sentido dos mínimos quadrados) aos pontos da tabela.

   (b) Idem, mas para o polinómio do segundo grau. Utilizando o polinómio obtido, determine uma estimativa do valor de $f(1.4)$.

   (c) Admitindo que $f'(x) - g'(x) \leq M, \ \forall x \in [1.2, 1.5]$ obtenha um majorante do erro absoluto do valor obtido na alínea anterior.
   Sugestao: use o teorema de Lagrange.

   (d) Relativamente aos dois casos anteriores, calcule o valor das somas dos quadrados dos desvios correspondentes aos ajustamentos efectuados. Qual seria o valor dessa soma, no caso de se fazer o ajustamento por um polinómio do 3º grau.

Solução:

$$a) \quad P_1(x) = -2.135933 + 7.451647x$$
$$b) \quad P_2(x) = 3.966473 - 2.244618x + 3.721460x^2; \qquad f(1.4) \approx P_2(1.4) = 8.118.$$
$$c) \quad |e(1.4)| \leq 0.01283 + M|1.4 - 1.5|$$
$$d) \quad \textstyle\sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - P_1(x_i))^2 = 0.06485; \qquad \sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - P_2(x_i))^2 = 0.306 \times 10^{-2};$$
$$\textstyle\sum_{i=0}^{3}(f(x_i) - P_3(x_i))^2 = 0.$$

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x	-1	0	1	2
$f(x)$	6	3	2	1

Pretende-se um ajustamento dos pontos da tabela por uma função do tipo:

$$g(x) = \frac{1}{Ax + B}$$

Determine as constantes A e B pelo método dos mínimos quadrados.

Sugestao: poderá ser conveniente efectuar uma mudança de variável.

Solução: Mudança de variável : $h(x) = 1/g(x) = A\,x + B$; $A = 4/15; B = 11/30$.

3. Determine a função da forma $g(x) = Ae^{x} + Be^{-x}$ que melhor se ajusta, no sentido dos mínimos quadrados, à seguinte tabela de valores

x	0	0.5	1.0
$f(x)$	5.0	5.2	6.5

Para simplificar os cálculos, escreva os elementos da matriz usando arredondamento simétrico e uma casa decimal.

Solução: $A = 1.9906; B = 3.0490.$

4. Seja f tal que $f(-2) = 3, f(0) = 6$ e $f(2) = 15$. Obtenha a função do tipo $g(x) = ax + b$ que melhor se ajusta aos valores dados, no sentido dos mínimos quadrados. Mostre ainda que

$$\sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - \alpha x_i - \beta)^2 \geq 6$$

quaisquer que sejam α, β constantes reais.

Solução: $a = 3, b = 8, \quad \sum_{i=1}^{3}(f(x_i) - ax_i - b)^2 = 6.$

5. Considere os 6 pontos $(-1, 7), (0, 6), (1, 6), (2, 4), (4, 3), (5, 1)$.

   (a) Determine a função $g(x) = a - x + bx^2$ cujo gráfico melhor se ajusta aos pontos segundo o método dos mínimos quadrados.

   (b) O mesmo que em a) usando $g(x) = ae^{bx} - \frac{x^2}{4}$, e uma transformação de variáveis.

6. Considere os pontos $(-5, -1), (-3, 0), (-1, -1), (1, 2)$.

   (a) Determine a função da forma $g(x) = \frac{a}{x+1} + bx^2$, que melhor aproxima esses pontos no sentido dos mínimos quadrados. Sugestão: comece por determinar para que valores de a e b a função g está definida em $[-5, 1]$.

   (b) Determine uma função da mesma forma que melhor aproxima o polinómio interpolador que passa pelos pontos referidos.

   (c) O mesmo que em a) para $g(x) = (a + bx^2)/(x + 1)$.

7. Dada a tabela

x	0	1.5	3.0	4.5	6.0
$f(x)$	1.00	1.57	2.00	4.30	7.00

diga em que consiste a sua melhor aproximação de mínimos quadrados por funçoes aproximantes do tipo $g(x) = ax + b\cos(x),\ a, b \in R$. Calcule esta melhor aproximação, bem como o desvio em 4.5.`EXAME, LEIC 15/12/2001`

8. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_j	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
f_j	1	0.5	-1	0

   (a) Obtenha a função do tipo $g(x) = a_0 + a_1 \sin(x) + a_2 \cos(x)$ que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados e determine $Q = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - g(x_j))^2$.

   (b) Seja $Q_1 = \sum_{j=0}^{3}(f(x_j) - a\cos(x_j))^2$. Com base na alínea anterior justifique que $Q_1 > 0.0625$, $\forall a \in R$. `EXAME, LEIC 13/02/2003`

9. Considere a aproximação por mínimos quadrados para os pontos

$$(-1, 1),\ (0, 1),\ (1, 2), (2, 2)$$

por uma função $g(x) = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 + a_3\phi_3$ com

$$\phi_1(x) = 1, \quad \phi_2(x) = x, \quad \phi_3(x) = \sin(\pi x) + x^4 - 2x^3 - x^2 + 3x + 1.$$

Mostre que a matriz do sistema normal nao é invertível e comente a escolha das funçoes ϕ_k.

10. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f :

x_j	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
f_j	0.262087	1.20472	2.82757	1.34375	0.0130539

Calcule (com o auxilio do *Mathematica*) os valores das constantes a, b que minimizam o funcional $\sum_{j=0}^{4}(f_j - ae^{bx_j^2})^2$.

Sugestao: Utilize o método de Newton para sistemas nao lineares.

11. Determine qual a função $g(x) = a + cx^2$ que melhor aproxima $f(x) = \sin(x)$ no intervalo $[0, 1]$ segundo o método dos mínimos quadrados. Qual o erro no ponto $x = 1$, e qual o maior erro $|f(x) - g(x)|$ nesse intervalo.

12. Determine a melhor aproximação no sentido dos mínimos quadrados da função $f_\alpha(x) = x^\alpha,\ \alpha \geq 0$ no subespaço dos polinómios de grau menor ou igual a um e em relação ao produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_0^2 f(x)g(x)\ dx, \qquad f, g \in C([0, 2])$$

`EXAME, LEFT 26/06/2003`

13. Considere a função real de variável real $f(x) = x$ no intervalo $I = [-1, 1]$.

    (a) Obtenha o polinómio de grau dois ($p_2(x)$) que melhor aproxima a função f em relação ao produto interno usual.

    (b) Idem, mas para o polinómio de grau três $p_3(x)$.

    (c) Com o auxilio do *Mathematica* verifique que $p_{2n}(x) \equiv p_{2n+1}(x),\ \forall n \geq 0,\ \forall x \in I$.

14. Determine a função do tipo $g(x) = e^x + ax^2 + bx + c$ que melhor aproxima a função nula no sentido dos mínimos quadrados, no intervalo $I = [0, 1]$.

15. Se $y(x)$ representar uma recta que é a aproximação de mínimos quadrados da função $\sin(x)$ no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$, mostre que o desvio $d(x) = \sin(x) - y(x)$ é ortogonal a qualquer polinómio do primeiro grau.

    Obs. Duas funçoes f e g dizem-se ortogonais se e só se $\langle f, g\rangle = 0$.