

Teoria dos erros

Nos exercícios deste capítulo os números são representados em base decimal.

1. Represente x em ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, nos seguintes casos
 - (a) $x = 1/6$
 - (b) $x = 1/3$
 - (c) $x = -83784$
 - (d) $x = -83785$
 - (e) $x = 83798$
 - (f) $x = 0.0013296$
2. Tomaram-se para valores aproximados de $N_1 = 0.3000 \times 10^1$, $N_2 = 0.3000 \times 10^{-3}$ e $N_3 = 0.3000 \times 10^4$, respectivamente os valores $\tilde{N}_1 = 0.3100 \times 10^1$, $\tilde{N}_2 = 0.3100 \times 10^{-3}$ e $\tilde{N}_3 = 0.3100 \times 10^4$. Determine os respectivos erros absolutos e relativos, bem como as percentagens de erro. Comente sobre os valores obtidos.
3. Considere os números $x = \pi$ e $y = 2199/700$.
 - (a) Pretendem-se aproximações \tilde{x} e \tilde{y} de x e y , respectivamente, com erros absolutos não excedendo 0.0005. Escolha \tilde{x} e \tilde{y} com 4 dígitos na mantissa, usando arredondamento simétrico. Obtenha ainda $\tilde{x} - \tilde{y}$.
 - (b) Calcule os erros absolutos e relativos de \tilde{x} , \tilde{y} e de $\tilde{x} - \tilde{y}$, bem como as percentagens de erro. Comente.
 - (c) Com o objectivo de ilustrar a influência nos resultados da precisão utilizada, represente em ponto flutuante com 6 algarismos na mantissa os números x e y . Determine $fl(fl(x) - fl(y))$ e o respectivo erro relativo. Houve melhoria nos resultados em relação a b) ?
4. Determine os erros absoluto e relativo cometidos no cálculo do determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5.7432 & 7.3315 \\ 6.5187 & 8.3215 \end{bmatrix}$$

se utilizar um sistema ponto flutuante com mantissa de comprimento 4.

5. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}. \quad (1)$$

- (a) Calcule $f(10^{-6})$ utilizando a fórmula (1).
- (b) Obtenha uma aproximação de $f(10^{-6})$, utilizando o desenvolvimento de f em série de Taylor, em torno de $x = 0$.

(c) Sabendo que $1 - \cos x = 2 \sin^2(x/2)$, calcule $f(10^{-6})$ utilizando uma nova fórmula para f .

(d) Compare os valores obtidos nas alíneas anteriores e comente.

6. Ao calcular-se a expressão

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

numa máquina usando o sistema de ponto flutuante FP(10,6,-30,30) com arredondamento simétrico, verificou-se que para valores de x muito grandes o erro relativo era também muito grande.

(a) Verifique que o erro relativo é 100% para $x = 2000$. Qual o valor do erro relativo para valores de x ainda maiores?

(b) Qual a razão desse erro relativo grande: o problema é mal condicionado ou há instabilidade numérica? Justifique e apresente uma forma de calcular $f(x)$ que não apresente erros relativos tão grandes.

7. Na equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, admita-se que os coeficientes são todos positivos e exactos e que $b^2 \gg ac$. Como é sabido, as duas raízes da equação são dadas por

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Faça $a = 1$, $b = 62.10$ e $c = 1$. A equação correspondente tem raízes $x_1 \simeq -0.01610723$ e $x_2 \simeq -62.08390$. Usando aritmética de ponto flutuante com 4 dígitos e arredondamento simétrico, obtenha aproximações para x_1 e x_2 . Dê uma explicação para o mau valor que obteve para x_1 e proponha uma maneira alternativa de calcular essa raiz.