Resolução do exame de Matemática Computacional de 28/10/08

Grupo I

1a)Procuramos um intervalo $[a, 0]$ tal que $|g'(x)| \leq L < 1, \forall x \in [a, 0]$. Temos $g'(x) = x$, logo $|g'(x)| \leq |a|, \forall x \in [a, 0]$. Assim, se escolhermos $a > -1$, verifica-se uma das condições do teorema do ponto fixo: $|g'(x)| \leq |a| < 1$. Seja, por exemplo, $a = -1/2$. Verifiquemos que a outra condição do teorema do ponto fixo também é satisfeita: $g(x) \in [-1/2, 0]$, $\forall x \in [-1/2, 0]$. Comecemos por verificar os extremos do intervalo: $g(0) = -0.5 \in [-1/2, 0]$; $g(-0.5) = -0.375 \in [-1/2, 0]$.Como g é decrescente em $[-1/2, 0]$, $(g'(x) = x < 0, \forall x \in [-1/2, 0])$, podemos afirmar que $g(x) \in [-1/2, 0]$, $\forall x \in [-1/2, 0]$. Concluindo, o teorema do ponto fixo permite-nos afirmar que, se $x_0 \in [-1/2, 0]$, a sucessão converge para o fonto fixo de g, situado nesse intervalo.

1b) Se $\{x_n\}$ for convergente, então o seu limite z é um ponto fixo de g, i.e. $g(z) = z$. Logo

$\frac{z^2-1}{2} = z \Longleftrightarrow \frac{z^2}{2} - z - \frac{1}{2} = 0$; As raizes desta equação são $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$. O ponto fixo que nos interessa situa-se no intervalo $[-0.5, 0]$; logo, $z = 1 - \sqrt{2} = -0.414...$

1c) As duas primeiras iteradas são $x_1 = g(-0.5) = -0.375; x_2 = g(-0.375) = -0.4297$. Apliquemos a estimativa do erro a posteriori: $|x_{k+1} - z| \leq \frac{L}{1-L}|x_{k+1} - x_k|$, onde $L = \max_{x \in [-0.5,0]} |g'(x)| = 0.5$. Daqui vem

$|x_2 - z| \leq \frac{0.5}{1-0.5}|x_2 - x_1| = |x_2 - x_1| = 0.0547$. O valor real do erro é $|z - x_2| = 0.0155$. Tal como era de esperar, a estimativa é superior.

2) Seja $g(\alpha) = \beta, g(\beta) = \alpha$. Consideremos a função $h_1(x) = g(x) - x$. Como g *é* contínua, h_1 também o é, logo verifica o teorema de Bolzano no intervalo $[\alpha, \beta]$. Por definição, $h_1(\alpha) = \beta - \alpha > 0$; $h_1(\beta) = \alpha - \beta < 0$. Logo existe $\xi \in [a, b]$ tal que $h_1(\xi) = 0$. Daqui resulta que $g(\xi) = \xi$, pelo que ξ é um ponto fixo de g.

Grupo II

1)Um sistema diz-se mal condicionado quando pequenos erros **relativos** nos dados iniciais podem conduzir a grandes erros **relativos** na solução do sistema.

2) O sistema é mal condicionado se o número de condição da matriz, $cond(A)$, for elevado, sendo

$cond(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$ (numa certa norma matricial). Neste caso, escolhendo, por exemplo, a norma por linha, temos

$\|A\|_\infty = \max(\ 4 + |a|, 4 + 2|a|) = 4 + 2|a|$;

$\left\|A^{-1}\right\|_\infty = \max(\ \frac{|16-a^2|}{|64-8a^2|} + \frac{|4a|}{|64-8a^2|} + \frac{|a^2|}{|64-8a^2|}, \frac{8|a|}{|64-8a^2|} + \frac{16}{|64-8a^2|})$.

i) Quando $a = 0$, verifica-se $cond(A) = \ 4.\ 1/4 = 1$, pelo que o sistema neste caso é **bem condicionado.**

ii) Quando $a \approx \sqrt{8}$, temos $64 - 8a^2 \approx 0$, pelo que $\left\|A^{-1}\right\|_\infty$ toma valores muito elevados, enquanto $\|A\|_\infty \approx 4 + 2\sqrt{8}$. Por conseguinte, o número de condição é elevado e o sistema **é mal condicionado**.

iii) Quando $a \to \infty$, temos $\|A\|_\infty \to \infty$ e $\left\|A^{-1}\right\|_\infty \to 1/8 + 1/8 = 1/4$. Logo, para valores grandes de a, o sistema também **é mal condicionado**.

3) **1º caso**. Admitamos que $a \neq 4$.
Primeira etapa do método da eliminação de Gauss:

$$\mathbf{A^{(1)}} = \begin{bmatrix} 4 & a & 0 \\ 0 & 4 - \frac{a^2}{4} & a \\ 0 & a & 4 \end{bmatrix}$$

Segunda (e última) etapa do método da eliminação de Gauss:

$$\mathbf{A^{(2)}} = \begin{bmatrix} 4 & a & 0 \\ 0 & 4 - \frac{a^2}{4} & a \\ 0 & 0 & 4 - \frac{4a^2}{16 - a^2} \end{bmatrix}$$

2º caso - ($a = 4$). Nesse caso, não se pode aplicar directamente o método da eliminação de de Gauss, porque o segundo pivot $a_{22} = 4 - a^2/4$ se anula. Para a aplicar o método, torna-se necessário trocar a segunda com a terceira linha de A e depois proceder do mesmo modo..

4) Temos

$$DetA = DetA^{(2)} = 4\left(4 - \frac{a^2}{4}\right)\left(4 - \frac{4a^2}{16 - a^2}\right) = 64 - 8a^2.$$

Daqui conclui-se que a matriz é invertível se e só se $64 - 8a^2 \neq 0$, isto é, $a \neq \sqrt{8}$.