Instituto Superior Técnico

Teste de Matemática Computacional 16/12/08

Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Comunicação

Resolução da versão A

I

Considere o sistema de equações:

$$\begin{aligned} 4x + b\sin y + z^2 &= 0 \\ 2x + 3(y+1) + 2e^z &= 0 \\ cosx + 3e^y - y + bz &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

onde b é um número real.

1. Se aplicarmos o método de Newton à resolução do sistema (1), partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (0,0,0)$, somos levados a um sistema de equações lineares. Mostre que a matriz desse sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 4 & b & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & b \end{bmatrix}. \tag{2}$$

e obtenha o segundo membro do sistema. **[0.8]**

Resolução. O sistema considerado pode ser escrito na forma $F(x,y,z) = 0$, onde $F = (F_1, F_2, F_3)$,

$$\begin{aligned} F_1(x,y,z) &= 4x + b\sin y + z^2, \\ F_2(x,y,z) &= 2x + 3(y+1) + 2e^z, \\ F_3(x,y,z) &= cosx + 3e^y - y + bz. \end{aligned} \tag{3}$$

Logo, a matriz jacobiana de F tem a forma

$$J_F(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4 & b\cos y & 2z \\ 2 & 3 & 2e^z \\ -\sin x & 3e^y - 1 & b \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Calculando $J_F(x^{(0)}) = J_F(0,0,0)$, obtém-se a matriz A considerada. Para obter o segundo membro do sistema, basta calcular $b = -F(0,0,0) = (0-5, -4)$.

2. Considere o sistema linear com a matriz (2). Justifique que o método de Jacobi converge para a solução deste sistema, desde que $2 < b < 4$. **[1.2]**

Resolução. Visto que, para os valores de b considerados, a matriz A não tem a diagonal estritamente dominante (nem por linhas nem por colunas) torna-se necessário, antes de mais, calcular a matriz de iteração do método de Jacobi. Neste caso, temos

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{b}{4} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{b} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

O método de Jacobi converge se e só se o raio espectral desta matriz for menor que 1. Para determinar o raio espectral de C_J, começamos por calcular os seus valores próprios. Para isso, é necessário resolver a equação

$$Det(C_J - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda(\frac{4}{3b} + \frac{b}{6}) = 0. \tag{6}$$

As raizes desta equação são $\lambda_1 = 0$,$\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{4}{3b} + \frac{b}{6}}$. Assim, para que o método de Jacobi seja convergente, deve verificar-se a inequação

$$\rho(C_J) = \sqrt{|\frac{4}{3b} + \frac{b}{6}|} < 1.$$

Queremos provar que o intervalo$]2, 4[$ faz parte da solução desta inequação. Por isso, consideremos apenas o caso de $b > 0$. Neste aso, a inequação considerada é equivalente a

$$8 + b^2 < 6b.$$

Facilmente se verfica que as raizes da equação $f(b) = b^2 - 6b + 8 = 0$ são $b = 2$ e $b = 4$. Por outro lado, $f(b)$ é uma função quadrática com o coeficiente de b^2 positivo. Logo, temos $f(b) < 0$, se $2 < b < 4$, donde se conclui que $\rho(C_J) < 1, \forall b : 2 < b < 4$.

II

Pretende-se aproximar a função $\log_2 x$ usando interpolação polinomial.

1. Diga o que entende por polinómio interpolador da função f nos nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$. **[1.0]**

   Resolução. O polinómio interpolador da função f nos nós $x_0, x_1, \ldots, x_n$ é o polinómio P de grau não superior a n que satisfaz $P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \ldots, n$.

2. Sabendo que $\log_2(1) = 0$, $\log_2(2) = 1$,$\log_2(4) = 2$, obtenha um valor aproximado de $\log_2(3)$, usando o polinómio interpolador nos nós $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 4$. **[1.0]**

   Resolução. Temos $f_0 = 0$,$f_1 = 1$ e $f_2 = 2$. Usando, por exemplo, a fórmula interpoladora de Newton, comecemos por calcular as diferenças divididas de f: $f[1, 2] = 1, f[2, 4] = \frac{1}{2}, f[1, 2, 4] = -\frac{1}{6}$. Logo, o polinómio interpolador é

   $$P_2(x) = 0 + (x - 1) - \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2).$$

   Finalmente, um valor aproximado de $log_2 3$ obtém-se calculando $P_2(3) = 5/3$.

3. Recorrendo à fórmula para o erro de interpolação, determine um majorante do erro absoluto do valor obtido na alínea anterior. Se em vez de usar os nós considerados usasse $x_0 = 2, x_1 = 4, x_2 = 5$, o majorante do erro absoluto seria maior ou menor? Justifique sem interpolar de novo. **[1.0]**

   Resolução. Uma vez que temos um polinómio interpolador de segundo grau, o erro de interpolação é dado por

   $$e_2(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)\frac{f'''(\xi)}{6},$$

onde $\xi \in [1,4]$ e $f(x) = log_2(x)$. Derivando f, obtém-se

$$f'''(x) = \frac{2}{x^3 ln2}.$$

Logo $|f'''(\xi)| \leq \max_{x\in[1,4]} |f'''(x)| = \frac{2}{ln2}$. Finalmente, obtém-se

$$|e_2(3)| \leq |(3-1)(3-2)(3-4)|\frac{2}{6ln2} = \frac{2}{3ln2}.$$

Se usássemos os pontos $x_0 = 2, x_1 = 4, x_2 = 5$, o erro de interpolação teria a forma

$$e_2(x) = (x-2)(x-4)(x-5)\frac{f'''(\xi)}{6},$$

onde $\xi \in [2,5]$. Note-se que $|(3-2)(3-4)(3-5)| = |(3-1)(3-2)(3-4)| = 2$, ou seja, a primeira parte do erro é igual nos dois casos. Quanto à segunda parte do majorante do erro, a que contem a derivada, no segundo caso é mais pequena que no primeiro, porque

$$\max_{x\in[2,5]} |f'''(x)| = \frac{2}{8ln2}.$$

Logo, no segundo caso, o majorante do erro é mais pequeno do que no primeiro.

III

Considere a seguinte tabela de valores de uma certa função f:

x_i	-2	0	1	2
f_i	0	3.75	4	3

1. Para aproximar integrais definidos no intervalo $[-2,2]$, considerem-se duas fórmulas de integração numérica:

$$Q_1(g) = \tfrac{2}{3}\left(g(-2) + 4g(0) + g(2)\right)$$
$$Q_2(g) = A_0 g(-2) + A_1 g(0) + A_2 g(2).$$

   (a) Determine A_0, A_1, A_2 de modo a que a fórmula Q_2 seja exacta para qualquer polinómio de grau não superior a 2. **[1.0]**

   Resolução.Os coeficientes A_0,A_1,A_2 podem obter-se pelo método dos coeficientes indeterminados, resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= \textstyle\int_{-2}^{2} 1dx = 4 \\ -2A_0 + 0A_1 + 2A_2 &= \textstyle\int_{-2}^{2} xdx = 0 \\ 4A_0 + 0A_1 + 4A_2 &= \textstyle\int_{-2}^{2} x^2dx = \tfrac{16}{3}. \end{aligned} \tag{7}$$

   Resolvendo o sistema, obtém-se $A_0 = A_2 = 2/3$, $A_1 = 8/3$. Como seria de esperar, estes pesos são os mesmos que os da fórmula Q_1, ou seja, as duas fórmulas coincidem.

(b) Calcule aproximações do integral $I(f) = \int_{-2}^{2}(x+1)f(x)$, onde f é a função tabelada, usando cada uma das fórmulas. **[1.0]**

Resolução.

$$Q_1((x+1)f(x)) = Q_2((x+1)f(x)) = A_0(-2+1)f(-2)+A_1(0+1)f(0)+A_2(2+1)f(2) = 16.$$

(c) Sabendo que f é um polinómio de segundo grau, algum dos resultados que obteve na alínea anterior é o valor exacto de $I(f)$? (Justifique, sem calcular $I(f)$ por outro meio). **[1.0]**

Resolução. Sendo f um polinómio de segundo grau, $(x+1)f(x)$ é um polinómio de terceiro grau. Por outro lado, as fórmulas Q_1 e Q_2 coincidem com a fórmula de Simpson (têm como nós os extremos do intervalo e o seu ponto médio). Por conseguinte, e uma vez que a fórmula de Simpson é de terceiro grau, as fórmulas Q_1 e Q_2 dão-nos o valor exacto do integral.

2. Obtenha a função da forma $g(x) = a+bx^2$ que melhor se ajusta à função tabelada, no sentido dos mínimos quadrados (considere apenas os 3 primeiros pontos da tabela). **[1.0]**

Resolução.A função ajustadora pode ser escrita na forma $g(x) = a\phi_0(x) + b\phi_1(x)$ onde $\phi_0(x) = 1$ e $\phi_1(x) = x^2$. O sistema normal para este problema tem a forma

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.75 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Resolvendo o sistema, obtem-se $a = 4.298, b = -1.029$.

IV

Considere o seguinte problema de valor inicial para uma equação diferencial ordinária:

$$y(x)x^2 + xy'(x) = 1, \qquad y(1) = 1. \tag{9}$$

Usando o método de Euler com passo $h = 0.1$, obtenha um valor aproximado de $y(1.2)$. **[1.0]**

Resolução. Resolvendo a equação diferencial em ordem à primeira derivada, tem-se

$$y'(x) = f(x, y) = \frac{1 - y(x)x^2}{x}.$$

De acordo com a condição inicial, $x_0 = 1, y_0 = 1$. Uma vez que se pretende uar o método de Euler com passo $h = 0.1$, temos $x_1 = 1.1$, $x_2 = 1.2$. O valor de $y(1.2)$ é aproximado por y_2, que se obtém em dois passos:

$$\begin{aligned} y(1.1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + h(1-1) = 1. \\ y(1.2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1 + h(\tfrac{1}{1.1} - 1.1) = 0.9809. \end{aligned} \tag{10}$$