Instituto Superior Técnico

Teste de Matemática Computacional 16/12/08

Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Comunicação

Resolução da VERSÃO B

Apresente todos os cálculos que efectuar

I

Considere o sistema de equações:

$$\begin{aligned} 3senx + 2y + cosz &= 0 \\ a(x^2 + x) + 4y + \tfrac{8}{3}z &= 0 \\ e^x - x + 2y + az &= 1, \end{aligned} \tag{1}$$

onde a é um número real.

1. Se aplicarmos o método de Newton à resolução do sistema (1), partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)$, somos levados a um sistema de equações lineares. Mostre que a matriz desse sistema é

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ a & 4 & \frac{8}{3} \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}. \tag{2}$$

e obtenha o segundo membro do sistema. **[0.8]**

Resolução. O sistema considerado pode ser escrito na forma $F(x, y, z) = 0$, onde $F = (F_1, F_2, F_3)$,

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 3\sin x + 2y + \cos z, \\ F_2(x, y, z) &= a(x^2 + x) + 4y + \tfrac{8}{3}z, \\ F_3(x, y, z) &= e^x - x + 2y + az - 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Logo, a matriz jacobiana de F tem a forma

$$J_F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3\cos x & 2 & -\sin z \\ a(2x + 1) & 4 & \frac{8}{3} \\ e^x - 1 & 2 & a \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Calculando $J_F(x^{(0)}) = J_F(0, 0, 0)$, obtém-se a matriz A considerada. Para obter o segundo membro do sistema, basta calcular $b = -F(0, 0, 0) = (-1, 0, 0)$.

2. Considere o sistema linear com a matriz (2). Justifique que, se $2 < a < 4$, o método de Jacobi converge para a solução deste sistema. **[1.2]**

Resolução. Visto que, para os valores de b considerados, a matriz A não tem a diagonal estritamente dominante (nem por linhas nem por colunas) torna-se necessário, antes de mais, calcular a matriz de iteração do método de Jacobi. Neste caso, temos

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{a}{4} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{2}{a} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

O método de Jacobi converge se e só se o raio espectral desta matriz for menor que 1. Para determinar o raio espectral de C_J, começamos por calcular os seus valores próprios. Para isso, é necessário resolver a equação

$$Det(C_J - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda(\frac{4}{3a} + \frac{a}{6}) = 0. \tag{6}$$

As raizes desta equação são $\lambda_1 = 0$,$\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{4}{3a} + \frac{a}{6}}$. Assim, para que o método de Jacobi seja convergente, deve verificar-se a inequação

$$\rho(C_J) = \sqrt{|\frac{4}{3a} + \frac{a}{6}|} < 1.$$

Queremos provar que o intervalo$]2, 4[$ faz parte da solução desta inequação. Por isso, consideremos apenas o caso de $a > 0$. Neste caso, a inequação considerada é equivalente a

$$8 + a^2 < 6a.$$

Facilmente se verfica que as raizes da equação $f(a) = a^2 - 6a + 8 = 0$ são $a = 2$ e $a = 4$. Por outro lado, $f(a)$ é uma função quadrática com o coeficiente de a^2 positivo. Logo, temos $f(a) < 0$, se $2 < a < 4$, donde se conclui que $\rho(C_J) < 1, \forall a : 2 < a < 4$.

II

Pretende-se aproximar a função $\Gamma(x)$ usando interpolação polinomial.

1. Sabendo que $\Gamma(1) = 1$ e que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para $n = 2, 3, ...$ obtenha um valor aproximado de $\Gamma(2.5)$, usando o polinómio interpolador nos nós $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$. **[1.0]**

   Resolução. Temos $\Gamma(1) = 1$,$\Gamma(2) = 1$ e $\Gamma(3) = 2$. Usando, por exemplo, a fórmula interpoladora de Newton, comecemos por calcular as diferenças divididas de Γ: $\Gamma[1, 2] = 0, \Gamma[2, 3] = 1, \Gamma[1, 2, 3] = \frac{1}{2}$. Logo, o polinómio interpolador é

   $$P_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$$

   Finalmente, um valor aproximado de $\Gamma(2.5)$ obtém-se calculando $P_2(2.5) = 1.375$.

2. Determine um majorante do erro de interpolação absoluto do valor obtido na alínea anterior, em termos da terceira derivada da função Γ. Se em vez de usar os nós considerados usasse $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4$, o majorante do erro absoluto seria maior ou menor? Na justificação da sua resposta, tenha em conta que a terceira derivada de $\Gamma(x)$ é uma função crescente, para $x > 1$. **[1.0]**

   Resolução. Uma vez que temos um polinómio interpolador de segundo grau, o erro de interpolação é dado por

   $$e_2(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\frac{\Gamma'''(\xi)}{6},$$

onde $\xi \in [1,3]$. Assim, obtém-se

$$|e_2(2.5)| \leq |(2.5-1)(2.5-2)(2.5-3)|\frac{\Gamma'''(\xi)}{6} = 0.0625\Gamma'''(\xi).$$

Se usássemos os pontos $x_0 = 2, x_1 = 3, x_2 = 4$, o erro de interpolação teria a forma

$$e_2(x) = (x-2)(x-3)(x-4)\frac{\Gamma'''(\xi)}{6},$$

onde $\xi \in [2,4]$. Note-se que $|(2.5-2)(2.5-3)(2.5-4)| = |(2.5-1)(2.5-2)(2.5-3)| = 0.375$, ou seja, a primeira parte do majoante do erro é igual nos dois casos. Quanto à segunda parte do majorante do erro, a que contem a derivada, no segundo caso é maior que no primeiro, porque

$$\max_{x\in[2,4]} |\Gamma'''(x)| > \max_{x\in[1,3]} |\Gamma'''(x)|$$

(aqui usamos o facto de que a terceira derivada de Γ é crescente). Logo, no segundo caso, o majorante do erro é maior do que no primeiro.

III

Considere a seguinte tabela de valores de uma certa função f:

x_i	0	1.5	2	3
f_i	0	3.75	4	3

1. Para aproximar integrais definidos no intervalo $[0,3]$, considerem-se duas fórmulas de integração numérica:

$$Q_1(g) = \tfrac{1}{2}\left(g(0) + 4g(1.5) + g(3)\right)$$
$$Q_2(g) = A_0 g(0) + A_1 g(2) + A_2 g(3).$$

   (a) Determine A_0, A_1, A_2 de modo a que a fórmula Q_2 seja exacta para qualquer polinómio de grau não superior a 2.[**1.0**]

   Resolução.Os coeficientes A_0,A_1,A_2 podem obter-se pelo método dos coeficientes indeterminados, resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} A_0 + A_1 + A_2 &= \textstyle\int_0^3 1dx = 3 \\ 0A_0 + 1.5A_1 + 3A_2 &= \textstyle\int_0^3 xdx = \frac{9}{2} \\ 0A_0 + \tfrac{9}{4}A_1 + 9A_2 &= \textstyle\int_0^3 x^2dx = 9. \end{aligned} \tag{7}$$

   Resolvendo o sistema, obtém-se $A_0 = \frac{3}{4}$, $A_1 = \frac{9}{4}$, $A_2 = 0$.

   (b) Calcule aproximações do integral $I(f) = \int_0^3 (x+1)f(x)$, onde f é a função tabelada, usando cada uma das fórmulas. [**1.0**]

   Resolução.

$$Q_1((x+1)f(x)) = 0.5(0+1)f(0) + 2(1.5+1)f(1.5) + 0.5(3+1)f(3) = 24.75.$$

$$Q_2((x+1)f(x)) = 0.75(0+1)f(0) + 2.25(2+1)f(2) + 0 = 27.$$

(c) Sabendo que f é um polinómio de segundo grau, algum dos resultados que obteve na alínea anterior é o valor exacto de $I(f)$? (Justifique, sem calcular $I(f)$ por outro meio). **[1.0]**

Resolução. Sendo f um polinómio de segundo grau, $(x+1)f(x)$ é um polinómio de terceiro grau. Por outro lado, a fórmula Q_1 coincide com a fórmula de Simpson (tem como nós os extremos do intervalo e o seu ponto médio). Por conseguinte, e uma vez que a fórmula de Simpson é de terceiro grau, a fórmula Q_1 dá-nos o valor exacto do integral (o que não acontece com a fórmula Q_2).

2. Obtenha a função da forma $g(x) = ax + bx^2$ que melhor se ajusta à função tabelada, no sentido dos mínimos quadrados (considere apenas os 3 primeiros pontos da tabela). **[1.0]**

Resolução.A função ajustadora pode ser escrita na forma $g(x) = a\phi_0(x) + b\phi_1(x)$ onde $\phi_0(x) = x$ e $\phi_1(x) = x^2$. O sistema normal para este problema tem a forma

$$\begin{bmatrix} 6.25 & 11.375 \\ 11.375 & 21.0625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13.625 \\ 24.4375 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Resolvendo o sistema, obtem-se $a = 4, b = -1$.

IV

1. Como define a ordem de um método numérico para equações diferenciais ordinárias? Qual é a ordem do método de Euler? **[1.0]**

Resolução. Um método numérico para equações diferenciais ordinárias diz-se de ordem k se o seu erro global for da ordem de h^k. O método de Euler é de primeira ordem.

2. Considere o seguinte problema de valor inicial para uma equação diferencial ordinária:

$$y(x)y'(x) + xy(x) = 1, \qquad y(0) = 1. \tag{9}$$

Usando o método de Euler com passo $h = 0.1$, obtenha um valor aproximado de $y(0.2)$. **[1.0]**

Resolução. Resolvendo a equação diferencial em ordem à primeira derivada, tem-se

$$y'(x) = f(x, y) = \frac{1 - y(x)x}{y}.$$

De acordo com a condição inicial, $x_0 = 0, y_0 = 1$. Uma vez que se pretende usar o método de Euler com passo $h = 0.1$, temos $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$. O valor de $y(0.2)$ é aproximado por y_2, que se obtém em dois passos:

$$\begin{aligned} y(0.1) \approx y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + h(1 - 0) = 1.1 \\ y(0.2) \approx y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1.1 + h(\tfrac{1}{1.1} - 0.1) = 1.18. \end{aligned} \tag{10}$$