Instituto Superior Técnico

Teste de Matemática Computacional 28/10/08

Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Comunicação

VERSÃO A

Apresente todos os cálculos que efectuar

I

1. Mostre que a equação
$$e^{-x} = x^2 \tag{1}$$
tem 1 única raiz em $[0, 1]$. [1.0]

2. Considere as sucessões $\{x_n\}_{n\in N}$, tais que $x_0 = 1$ e $x_{n+1} = g(x_n)$, onde a função iteradora g tem uma das seguintes formas:
$$i) \quad g(x) = \exp(-\tfrac{x}{2});$$
$$ii) \quad g(x) = \exp(-x) - x^2;$$
$$iii) \quad g(x) = \frac{\exp(-x)(1+x) + x^2}{\exp(-x) + 2x}.$$
   (a) Diga qual das funções indicadas é a função iteradora do método de Newton (quando aplicado à equação (1)). Mostre que este método converge para a raiz considerada, qualquer que seja $x_0 \in [0, 1]$. [1.5]

   (b) Além da função considerada na alínea anterior, qual (ou quais) das funções indicadas gera uma sucessão que converge para a raiz da equação (1)? Justifique a resposta, com base em resultados teóricos. [1.0]

3. Que significa dizer que um método iterativo tem convergência de ordem p? Qual é a ordem de convergência no caso de aplicar a função indicada em 2-b? [1.5]

II

Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -c & 1 \\ c & -c & -1 \\ c & -c & 1 \end{bmatrix}, \qquad c \in I\!R.$$

1. Utilizando o método da eliminação de Gauss, reduza A à forma triangular superior. [1.0]

2. Com base na alínea anterior, calcule $DetA$. Para que valores de c a matriz A é invertível? [1.5]

3. Seja $c = 1/2$. Sabendo que a imagem do vector $x = (1, 1, 1)$, neste caso, é $A\,x = (3/2, -1, 1)$, justifique que $\|A\|_2 \geq \sqrt{\frac{17}{12}}$. (Responda sem calcular $\|A\|_2$). [1.5]

4. O que entende por um sistema linear bem condicionado? [1.0]