Instituto Superior Técnico

Teste de Matemática Computacional 28/10/08

Eng. Electrónica e Eng. de Redes de Comunicação

VERSÃO B

Apresente todos os cálculos que efectuar

I

1. Considere a sucessão $\{x_n\}_{n\in N}$ definida por $x_{n+1} = 1/2(x_n^2 - 1)$.

   (a) Indique um intervalo real da forma $[a, 0]$ tal que a sucessão considerada seja convergente sempre que $x_0 \in [a, 0]$. Justifique com base no teorema do ponto fixo. **[1.5]**

   (b) Admitindo que x_0 pertence ao intervalo acima considerado, para que número converge x_n? Porquê? **[1.0]**

   (c) Escolhendo $x_0 = -0.5$ calcule duas iteradas e obtenha uma estimativa do erro absoluto de x_2. Compare essa estimativa com o erro de facto cometido. **[1.5]**

2. Seja g uma função contínua em $[\alpha, \beta]$,tal que $g(\alpha) = \beta$ e $g(\beta) = \alpha$.Mostre que g tem, pelo menos, um ponto fixo em $[\alpha, \beta]$. **[1.0]**

II

Considere um sistema linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & a & 0 \\ a & 4 & a \\ 0 & a & 4 \end{bmatrix}, \qquad a \in I\!R.$$

1. Diga o que entende por um sistema mal condicionado. **[1.0]**

2. Em relação ao sistema em estudo, diga (justificando) se ele é bem ou mal condicionado em cada um dos seguintes casos: i) quando $a = 0$; ii) quando $a \approx \sqrt{8}$; iii) quando a é um número positivo muito elevado. **[1.5]**

   Na resposta a esta pergunta, tenha em conta que a inversa de A, quando existe, é dada por

$$\mathbf{A^{-1}} = \frac{1}{64 - 8a^2} \begin{bmatrix} 16 - a^2 & -4a & a^2 \\ -4a & 16 & -4a \\ a^2 & -4a & 16 - a^2 \end{bmatrix}.$$

3. Reduza a matriz à forma triangular, usando o método da eliminação de Gauss. **[1.0]**

4. Com base na alínea anterior, obtenha o determinante de A e diga para que valores de a a matriz é invertível. **[1.5]**