Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Exame de Matemática Computacional - 12 de Fevereiro de 2004 (segunda época)
Licenciatura em Engenharia Informática e Computadores

I

Considere a sucessão de números reais $\{x_n\}$,$n \in N$, tal que $x_0 \in I\!R$ e

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\cos(x_n) + 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

1. **1.5** Com base no teorema do ponto fixo, justifique que esta sucessão converge e que o seu limite não depende de x_0.

   Sugestão: considere inicialmente $x_0 \in [-R, R]$, onde R é um número real positivo arbitrário.

2. **1.0** Determine (justificando teoricamente) um intervalo real (de comprimento não superior a 1) que contenha o limite a que se refere a alínea anterior.

3. **1.5** Sendo $x_0 = 1$, determine (sem calcular iterações) qual o valor mínimo de n para o qual se garante que $|x_n - z| \leq \epsilon$, onde z é o limite da sucessão considerada e ϵ um número positivo dado.

4. **2.0** Partindo do mesmo valor de x_0, efectue duas iterações do método de Newton, com o objectivo de aproximar z. Para garantir que se verifique a mesma estimativa de erro que na alínea anterior, serão necessárias, neste caso, mais ou menos iterações ? Justifique.

II

Pretende-se resolver o seguinte sistema de equações não-lineares pelo método de Newton:

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 = -3 \\ 4x_1 + x_2^3 + x_3 = 2 \\ x_1 x_3 + 5x_2 = 3 \end{array} \right. , \qquad (1)$$

usando como aproximação inicial o vector $x^{(0)} = (1, 0, -1)^T$.

1. **1.5** Mostre que, para se obter $x^{(1)}$, se deve resolver um sistema linear da forma $A\,v = h$, onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

v e h são vectores de $I\!R^3$. Calcule o vector h.

2. **1.5** Transforme o sistema linear considerado num sistema equivalente, de modo a que fique garantida a convergência do o método de Gauss-Seidel. Depois, tomando como aproximação inicial $v^{(0)} = (-1,-1,-1)^T$, aplique este método até obter a solução exacta do sistema linear. (Se não resolveu a alínea anterior, considere um vector h arbitrário e efectue uma iteração do método de Gauss-Seidel).

3. **1.0** Finalmente obtenha o valor de $x^{(1)}$ (primeira iterada do método de Newton), usando os cálculos da alínea anterior.

4. **1.5** Calcule $DetA$ (onde A é a matriz considerada em 1), aplicando a factorização de Doolittle.

III

Considere a função real f cujos valores são dados na seguinte tabela:

x_i	0	1/4	1/2	3/4	1
$f(x_i)$	7	4	1	3	7

1. **1.5** Utilizando a fórmula interpoladora de Newton, **de grau 2,** obtenha um valor aproximado de $f(0.7)$. Justifique a escolha dos nós de interpolação.

2. **2.0** Determine os valores das constantes b_0, b_1 que minimizam o valor da soma

$$\sum_{i=0}^{4} \left(f(x_i) - b_0 - b_1 (x_i - 0.5)^2 \right)^2,$$

onde f é a função tabelada, e calcule esse mínimo.

3. Pretende-se aproximar o integral

$$\int_0^1 g(x)dx,$$

onde g é uma certa função real, por uma quadratura do tipo

$$I_2(f) = A_0 g(1/4) + A_1 g(1/2) + A_2 g(3/4).$$

(a) **2.0** Determine os pesos da quadratura pelo método dos coeficientes indeterminados e diga qual o seu grau.

(b) **1.0** Aplique a quadratura obtida ao cálculo do integral $\int_0^1 f(x)/(x^2+1)dx$, onde f é a função a que se refere a tabela anterior.

4. **2.0** Considere a equação diferencial

$$y''(x) = cos(x)y(x) + y'(x)$$

com as condições iniciais

$$y(0) = 1; \;\; y'(0) = 1.$$

Reduzindo-a previamente a um sistema de equações de primeira ordem, obtenha valores aproximados de $y(h)$ e $y'(h)$(com $h > 0$), efectuando um único passo do método de Euler.

SEGUNDA PARTE

1. **10.** Considere o sistema de duas equações não lineares

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2^2 &= a_3 \\ b_1x_1^2 + b_2x_2 &= b_3, \end{aligned}$$

onde a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3 são coeficientes reais conhecidos.

Escreva um programa em *Mathematica* que, dados os valores destes coeficientes, procure uma solução do sistema pelo método de Newton. A execução do programa termina quando a norma da diferença entre iteradas for menor que uma certa tolerância ϵ, dada pelo utilizador, ou ao fim de um certo número de iterações, caso este critério de paragem não seja entretanto atingido. O programa devolve a solução aproximada, caso esta seja obtida, ou uma mensagem dizendo que não foi encontrada a solução. Para resolver os sistemas lineares das iterações, utilizar o comando *LinearSolve*.

2. **10.** Escreva um programa em *Mathematica* que, dados os valores de uma função f em quatro pontos x_0,x_1,x_2,x_3, e um ponto arbitrário x, devolva o valor aproximado de $f(x)$, calculado por interpolação cúbica. O polinómio interpolador deve ser construído pela fórmula de Newton.