Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores
Exame de Matemática Computacional- 30/01/2003
PRIMEIRA PARTE

I

Considere a seguinte equação algébrica:

$$x^3 - 2x - 1 = 0.$$

Para determinar a raiz desta equação , situada em $[1.5, 2]$, utilizaram-se 3 métodos, caracterizados pelas seguintes funções iteradoras:

$$g_1(x) = \frac{2x^3+1}{3x^2-2}$$

$$g_2(x) = (2x+1)^{1/3}$$

$$g_3(x) = \frac{x^3-1}{2}$$

1. Qual destas funções corresponde ao método de Newton? Justifique e mostre que estão satisfeitas as condições de convergência do método, qualquer que seja a aproximação inicial no intervalo $[1.5, 2]$.
2. Mostre que, no caso da função g_2, o método converge, qualquer que seja a a aproximação inicial $x_0 \in [1.5, 2]$.
3. Se utilizar o método com a função iteradora g_2, com $x_0 \in [1.5, 2]$, quantas iterações são necessárias para garantir uma aproximação com um erro inferior a 10^{-3}?
4. Se utilizar a função iteradora g_3, haverá alguma aproximação inicial, com a qual o método convirja para a raiz procurada? Justifique.

Cotações: 2.0-1.5-1.5-1

II

Seja ϕ uma função continuamente diferenciável e crescente em R. Considere o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 5y - x - 2z = 5 \\ \phi(z) + z + 41/3 = 2y. \end{cases}$$

1. Ao aproximar a solução deste sistema pelo método de Newton, partindo da aproximação inicial $x^{(0)} = (1, 0, -2)$, mostre que o sistema linear que se resolve na primeira iteração tem a matriz

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 + \phi'(z) \end{bmatrix}$$

2. Que condição deve satisfazer ϕ para que o método de factorização de Cholesky possa ser aplicado a esta matriz ?

3. Admitindo que a condição referida na alínea anterior é satisfeita, obtenha a factorização de Cholesky de J.

4. No caso de $\phi(z) = 4z^3/3$, efectue a primeira iteração do método de Newton, utilizando a aproximação inicial considerada em 1 e resolvendo o sistema linear pelo método de Cholesky. (Se não respondeu à alínea anterior, pode utilizar o método da eliminação de Gauss para resolver o sistema).

Cotações: 2.0-1.0-1.5-2.0

III

1. Sabendo que $f(-1) = 11$,$f(1) = 7$ e $f(3) = 51$, obtenha um valor aproximado de $f(0)$, por interpolação quadrática.

2. Seja f a função considerada em 1 e seja P_3 o polinómio que interpola f em todos os pontos e ainda no ponto $x_3 = 2$. Sabendo que $f[-1, 1, 2] = 4$, escreva uma expressão de $P_3(x)$.

3. (a) Utilizando a regra de Simpson, calcule um valor aproximado de $\int_{-1}^{3} f(x)dx$, onde f é a função a que se refere o problema 1.

   (b) Diga qual é o grau da regra de Simpson e o que é que entende por grau de uma regra de integração numérica.

4. Considere o seguinte problema de valores iniciais para uma equação diferencial de segunda ordem:

$$y''(x) = xy(x)^3 y'(x)$$
$$y(1) = -1, y'(1) = -1$$

   Efectuando apenas um passo do mtodo de Taylor de segunda ordem, obtenha um valor aproximado de $y'(1 + h)$, onde h é um número próximo de 0.

Cotações: 2.0-1.5-1.5-1.0-2.0

SEGUNDA PARTE

O seguinte algoritmo em Mathematica permite, dada uma tabela de valores de uma função F, e um ponto x, que não pertence à tabela, calcular um valor aproximado de $F(x)$ por interpolação :

$Approx[Tabf\_, x\_] := Module[\{n, nos, valores, Matriz, A\}, n = Length[Tabf];$
$nos = Table[Tabf[[i, 1]], \{i, n\}];$

$valores = Table[Tabf[[i, 2]], \{i, n\}];$

$Matriz = Table[nos[[j]]^{(i-1)}, \{j, 1, n\}, \{i, 1, n\}];$

$A = LinearSolve[Matriz, valores];$

$Px = Sum[A[[i]]x^{(i-1)}, \{i, 1, n\}]]$

1. Supondo que o polinómio interpolador correspondente a um certo caso é $P(x) = ax^4 - bx^2 + cx + 1$, quais deverão ser nesse caso os valores das variáveis n e da lista A? Justifique a resposta.

2. Escreva uma função (ou conjunto de funções) em Mathematica que permita obter o mesmo resultado a partir dos mesmos dados, mas usando a fórmula interpoladora de Lagrange.

   Nota : pode empregar no algoritmo os símbolos $\sum$ e $\prod$, desde que use a sintaxe correcta do Mathematica. O código dverá estar bem estruturado e conter os comentários nescessários à sua interpretação .

3. Suponhamos que se pretende interpolar a função f, não por um polinómio intepolador, mas por uma função do tipo $q(x) = b_0 + b_1 Cos(x) + b_2 Cos(2x) + \ldots = \sum_{k=0}^{n-1} b_k cos(kx)$. Tomando como ponto de partida a função "Approx", acima reproduzida, que alterações deve fazer para obter valor da aproximação neste caso?

Cotações: 6.0 - 8.0 -6.0