Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores
Exame de Matemática Computacional- 13/02/2003
PRIMEIRA PARTE

I

Considere a sucessão definida por

$$x_0 = 1; \;\; x_{k+1} = \sqrt{cos(x_k)}, \;\; k = 0, 1, \ldots$$

1. Recorrendo ao teorema do ponto fixo, mostre que esta sucessão é convergente e que o seu limite pertence ao intervalo $[1/2, 1]$.
2. Sem calcular iteradas, determine um majorante de $|z - x_{20}|$, onde z é o limite da sucessão considerada na alínea anterior.
3. Mostre que z é uma das raizes da equação
$$x^2 - cosx = 0. \tag{1}$$
4. Poderia utilizar o método de Newton, com $x_0 \in [1/2, 1]$, para aproximar a raiz considerada da equação (1)? Se o fizesse, a convergência seria mais rápida ou mais lenta que no caso do método iterativo considerado na alínea 1)? Justifique sem efectuar iterações.

Cotações: 2-1.5-1-1.5

II

Considere as matrizes A e A^{-1}, definidas por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 2 & a \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2-2a^2} \begin{bmatrix} 2-a^2 & -a & a^2 \\ -a & 1 & -a \\ a^2 & -a & 2-a^2 \end{bmatrix}.$$

1. Obtenha a expressão de $cond_1(A)$. Com base nessa expressão, que pode dizer sobre o condicionamento de A quando $a \to 1$? E quando $a \to \infty$?
2. Prove que, se $|a| < 1$, o método de Jacobi converge para a solução um sistema com a matriz A, qualquer que seja a aproximação inicial.
3. Admitindo que $|a| = 1/2$ e que $\|x - x^{(0)}\|_\infty \leq 1$ (onde x é a solução do sistema considerado),quantas iterações do método de Jacobi são necessárias para que se obtenha uma aproximação $x^{(k)}$, tal que $\|x - x^{(k)}\|_\infty \leq 0.001$?

4. Seja $a = \sqrt{2}$. Obtenha a factorização de Doolittle de A (caso necessário, troque a ordem das linhas da matriz).

Cotações: 2-2-1.5-1.5

III

1. Sejam $l_0(x), l_1(x), \ldots, l_n(x)$ os polinómios fundamentais de Lagrange para os nós $\{x_0, x_1, \ldots . x_n\}$ $(n \geq 1)$. Prove que

$$\sum_{j=0}^{n} x_j l_j(x) = x, \ \forall x \in R$$

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f:

x_j	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
f_j	1	0.5	-1	0

   (a) Obtenha a função g da forma

$$g(x) = a_0 + a_1 senx + a_2 cosx$$

   que melhor aproxima f no sentido dos mínimos quadrados e determine, para essa função

$$Q = \sum_{j=0}^{3} (f(x_j) - g(x_j))^2.$$

   (b) Seja $Q_1 = \sum_{j=0}^{3} (f(x_j) - a\,cos(x_j))^2$. Com base na alínea anterior,justifique que $Q_1 > 0.0625, \forall a \in R$.

Dos problemas 3 e 4, resolva apenas um:

3. Para obter um valor aproximado do integral

$$\int_0^3 f(x)dx$$

   pretende-se usar uma fórmula de integração numérica do tipo

$$I_1(f) = A_0 f(1) + A_1 f(2).$$

   Determine A_0 e A_1 pelo método dos coeficientes indeterminados e verifique qual é o grau da fórmula obtida.

4. Considere a equação diferencial

$$y'(x) = xsen(y)$$

   com a condição inicial y(0)=1. Obtenha um valor aproximado de $y(0.2)$ usando o método de Euler com $h = 0.1$ e determine um majorante do erro da aproximação obtida.

Cotações: 2-2-1-2-2

SEGUNDA PARTE

O seguinte algoritmo em Mathematica tem por objectivo obter uma solução aproximada de um sistema de equações lineares.

$Sistema[A\_, v\_, eps\_] := (dim = Length[A];$
$x0 = Table[0, \{i, dim\}]; x1 = x0; dif = eps + 1;$
$While[dif > eps,$
$Do[x1[[i]] = (v[[i]] - \sum_{j=1}^{i-1} A[[i,j]]x1[[j]] - \sum_{j=i+1}^{dim} A[[i,j]]x0[[j]])/A[[i,i]],$
$\{i, dim\}];$
$dif = Max[Abs[x1 - x0]]; x0 = x1]; x1)$

1. De que método se trata? Admitindo que a matriz do sistema, representada na notação do Mathematica, é $A = \{\{2,1,1\},\{1,2,1\},\{1,1,2\}\}$, e que $v = \{4,4,4\}$, diga qual será o conteúdo da lista $x1$ ao fim da primeira iteração .

2. Pretende-se que o algoritmo pare ao fim de $NMAX$ iterações (NMAX deverá ser um dos parâmetros da função), caso o critério de paragem não tenha sido satisfeito antes, e que, além da solução , a função devolva o número de iterações efectuadas. Que alterações deverá, para isso, efectuar no programa?

3. Tomando como modelo a função da alínea 2, escreva o código em Mathematica de uma função para calcular a solução aproximada de um sistema de n equações pelo método SOR. Neste caso, o coeficiente w do método SOR deverá ser um parâmetro da função e o critério de paragem deverá ser $\|Ax^{(k)} - v\|_\infty < \epsilon$.

Cotações: 6-6-8